

18 gennaio 2011  
15 marzo 2011

## Primo Incontro

 POLITECNICO DI MILANO



## I numeri

### Incontri con allievi del Liceo Classico

Luisa Rossi Costa



**Caldei:** ciclo lunare di 30 giorni; 12 lune in un anno, sole che sorge e tramonta in punti diversi dell'orizzonte, ma il ciclo si ripete circa ogni 360 giorni => anno.

...numerazione in base 60 o 30

**Numerazione celtica:** a base 20, rimasta nella lingua francese in alcuni numeri

**Romani:** base decimale, intuibile anche nei relativi simboli

Quasi nessuno aveva un simbolo per lo **zero**



## Numeri nella storia: assiro-babilonesi

1		11		21		31		41		51	
2		12		22		32		42		52	
3		13		23		33		43		53	
4		14		24		34		44		54	
5		15		25		35		45		55	
6		16		26		36		46		56	
7		17		27		37		47		57	
8		18		28		38		48		58	
9		19		29		39		49		59	
10		20		30		40		50			



# Numeri nella storia: Egitto

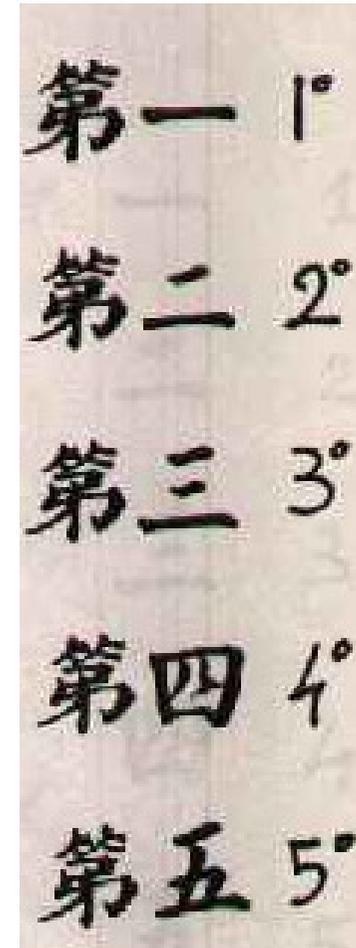
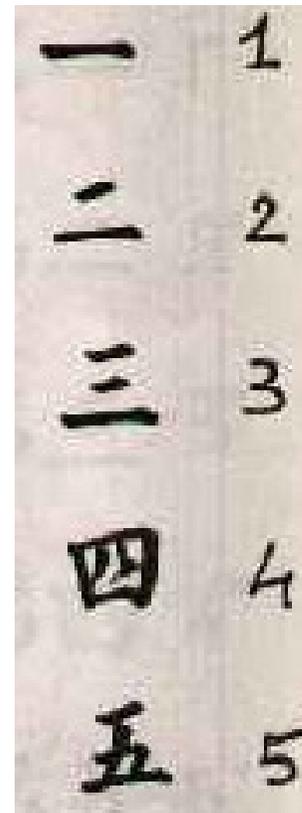
1		wa	10	∩	mD
2		sn	20	∩∩	Dwt
3		xmt	30	∩∩∩	mabA
4		fdn	40	∩∩∩∩	Hmw
5		dj	100	∩∩∩∩∩	Sn.t
6		sjs	1000	∩∩∩∩∩∩	xA
7		sfx	10,000	∩∩∩∩∩∩∩	DbA
8		xmn	100,000	∩∩∩∩∩∩∩∩	Hfn
9		psD	1,000,000	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	HH

1	1	10	10	100	100	1000	1000
2	2	20	20	200	200	2000	2000
3	3	30	30	300	300	3000	3000
4	4	40	40	400	400	4000	4000
5	5	50	50	500	500	5000	5000
6	6	60	60	600	600	6000	6000
7	7	70	70	700	700	7000	7000
8	8	80	80	800	800	8000	8000
9	9	90	90	900	900	9000	9000

1	10	100	1000	10000	100000	10 <sup>6</sup>



Nella numerazione romana sembra evidente il legame con le dita delle mani





# Numeri arabi

Originale	Nome del numerale	Equivalente
٠	ṣifr	0
١	wāḥad	1
٢	iṭnīn	2
٣	ṭalāṭa	3
٤	arbaʿa	4
٥	ḥamsa	5
٦	sitta	6
٧	sabʿa	7
٨	ṭamānya	8
٩	tisʿa	9
١٠	ʿašra	10

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
صفر	واحد	إثنان	ثلاثة	أربعة	خمسة	ستة	سبعة	ثمانية	تسعة	عشرة
ṣifr	wāḥid	iṭnān	ṭalāṭah	'arba'ah	ḥamsah	sittah	sab'ah	ṭamāniyyah	tis'ah	'ašarah
صفر	واحد	جوج	تلاتة	ربعة	خمسة	ستة	سبعة	تمنية	تسعود	عشرة
sifr	wahed	žuč	tlata	reb'a	hemsah	setta	seb'a	tmenya	tes'ūd	'ašara

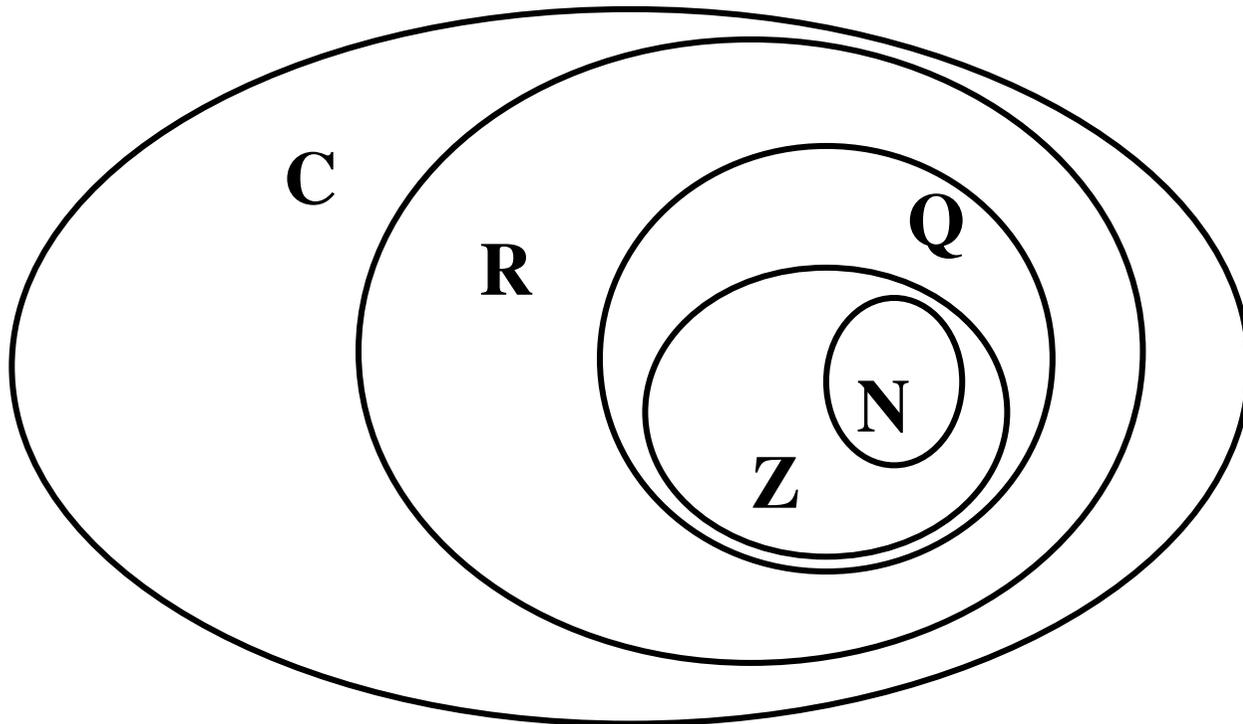


- **N** numeri interi naturali
- **Z** numeri interi relativi
- **Q** numeri razionali
- **R** numeri reali
- **C** numeri complessi

**Ogni insieme numerico successivo ad N include il precedente ed è un suo *ampliamento***



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^+$$



## I protagonisti dell'assiomatizzazione dei numeri naturali

9



Giuseppe Peano  
1858 - 1932



Bertrand Russell  
1872 - 1970



Idee primitive fondamentali: zero, numero, successivo

1.  $0$  è un numero naturale
2. ogni numero naturale  $n$  ha un unico successivo  $n^+$
3.  $0$  non è successivo di alcun numero naturale
4. numeri naturali diversi hanno successivi diversi
5. se  $0$  appartiene ad un insieme  $M$ , e ogni elemento di  $M$  ha in  $M$  il successivo, allora  $M$  coincide con  $N$



- Sul quinto assioma è basato **il principio di induzione:**

Sia  $P(n)$  un predicato riguardante il numero naturale  $n$ ,  
se

1.  $P(0)$  è vero
2. per ogni  $k$  in  $\mathbb{N}$ , da  $P(k)$  segue  $P(k+1)$

allora il predicato  **$P(n)$  è vero per ogni numero naturale  $n$**



Applicazioni del Principio di induzione:

**1 Somma di primi  $n$  interi naturali**

**2 Somma dei termini di una progressione geometrica**

**3 Somma dei quadrati dei primi  $n$  numeri naturali**

**4 Somma dei cubi dei primi  $n$  numeri naturali**



Georg Cantor  
1845 – 1918

L'insieme  **$H$  ha cardinalità  $n$**  quando gli elementi di  $H$  si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i primi  $n$  interi naturali

L'insieme è costituito da **un numero finito di elementi** se esiste un  $n$  per il quale si può realizzare tale corrispondenza. Diversamente l'insieme è **infinito**

Quando **due insiemi  $H$  e  $K$ , finiti o infiniti** si possono mettere in **corrispondenza biunivoca**, si dicono di **eguale potenza o equipotenti**



**Può succedere che per l'insieme  $H$  non si trovi un numero naturale  $n$  con il quale poter realizzare una corrispondenza biunivoca con i primi  $n$  interi.**

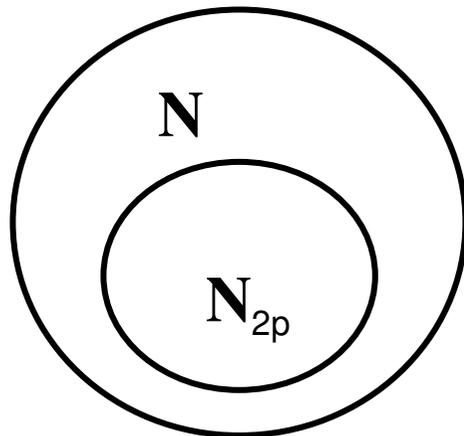
Se si riuscisse però ad ordinare ugualmente l'insieme, con un opportuno criterio, in modo che ogni elemento possa essere legato ad uno e un solo numero intero naturale e viceversa, allora l'**insieme** sarebbe **infinito numerabile**

**Quali esempi di infinito numerabile?**



I numeri interi pari  $\mathbf{N}_{2p}$  o i numeri interi  $\mathbf{N}_{2p+1}$ ,  $p=0,1,2,3,$  (cioè  $p \in \mathbf{N}$ ),

Sono sicuramente un sottoinsieme proprio di  $\mathbf{N}$  !



$\mathbf{N}_{2p}$  e  $\mathbf{N}_{2p+1}$  sono insiemi disgiunti e

$$\mathbf{N}_{2p} \cup \mathbf{N}_{2p+1} = \mathbf{N}$$

**Ma ecco una proposta di corrispondenza biunivoca con  $\mathbf{N}$**

$\mathbf{N}$       0   1   2   3   4   5   6   7   8   . . . . .

$\mathbf{N}_{2p}$     0   2   4   6   8   10   12   14   16   . . . . .

$\mathbf{N}_{2p+1}$    1   3   5   7   9   11   13   15   17   . . . . .



Possiamo concludere che  $\mathbb{N}_{2p}$  e  $\mathbb{N}_{2p+1}$  sono **infiniti numerabili**, cioè hanno la **stessa potenza di  $\mathbb{N}$** , pur essendo sottoinsiemi propri di  $\mathbb{N}$ .

Si possono aggiungere molti altri esempi: **tutti i multipli** di un fissato **intero  $p$**  costituiscono insiemi numerabili:

$0 \quad 1p \quad 2p \quad 3p \quad 4p \quad 5p \quad 6p \quad 7p \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

e costituiscono ancora un sottoinsieme proprio di  $\mathbb{N}$



Le **quattro operazioni** – somma, sottrazione, prodotto, divisione – introdotte in  $\mathbf{N}$  inducono a cercare insiemi numerici più ampi.

Ci sono vistose limitazioni:

- 1 – la **sottrazione**  $m-n$  si può eseguire solo con minuendo  $m$  non inferiore al sottraendo  $n$  ( $m \geq n$ )
- 2 – la **divisione**  $m:n$  fornisce un risultato intero se e solo se il dividendo  $m$  è multiplo del divisore  $n$  ( $m=kn$ )



Quando la colonnina del termometro passa da + 5 gradi a - 2 gradi si comprende che la temperatura è scesa di 7 gradi; ....potremmo dire che  $+ 5 - 7 = - 2$

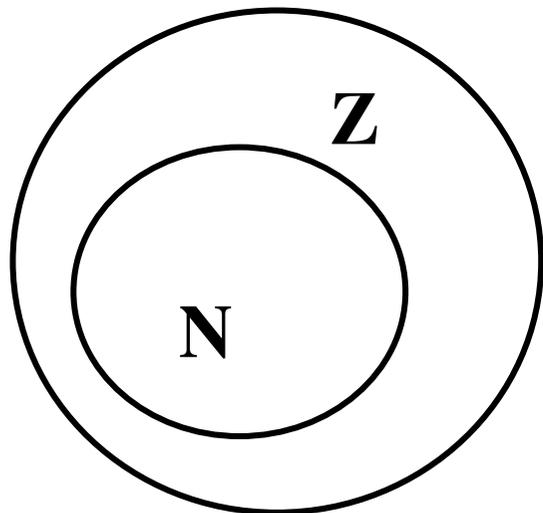
**... abbiamo forse ovviato alla limitazione presentata dalla sottrazione in  $\mathbf{N}$ ?**

Di fatto il matematico non è mai così sbrigativo, ma associando ai numeri interi un segno + o - nasce il nuovo insieme con numeri negativi,  $- n$ , e positivi,  $+ n$ .

**Z è infinito, ordinato e illimitato inferiormente e superiormente**

. . . -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 . . . .

- Si introducono le quattro operazioni con le adeguate *regole dei segni*
- I numeri relativi non negativi si possono identificare con i naturali; i negativi *allargano* l'insieme
- Le quattro operazioni conservano le proprietà che avevano in  $\mathbf{N}$ , **non ci sono più limitazioni nella sottrazione.**



- $\mathbf{Z}$  contiene propriamente  $\mathbf{N}$
- $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{N}$  si possono porre in corrispondenza biunivoca?
- gli elementi di  $\mathbf{Z}$  si ordinano in una successione
- $\mathbf{Z}$  è **numerabile**

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	.	.	.
$\mathbf{Z}$	0	-1	+1	-2	+2	-3	+3	-4	+4	-5	+5	+6	.	.	.



In  $\mathbf{Z}$  rimane il problema della divisione: il quoziente di due numeri non è sempre un numero intero relativo!

Per ampliare ulteriormente l'insieme:

- **Coppie ordinate** di interi relativi  $(m,n)$  ove  $n \neq 0$
- Adeguata **legge di composizione**
- **Relazione di equivalenza**

... nascono i **numeri razionali  $\mathbf{Q}$**



- La **coppia (m,n)** non é altro che l'abituale frazione  $m/n = \frac{m}{n}$
- Gli interi  $m$  ed  $n$  potrebbero avere un divisore comune, diverso da 1, quindi uno stesso numero può essere rappresentato da **coppie equivalenti**

$$\frac{m}{n} \cong \frac{p}{q} \iff mq = np$$

- Coppie equivalenti formano la **classe di equivalenza**; ogni numero razionale è associato ad una classe ed ogni elemento della classe può rappresentare il numero
- Scegliendo coppie  $(m,n)$  con  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n > 0$  ed  $m \in \mathbf{Z}$ , il segno del numero razionale rimane legato al numeratore



I **numeri razionali** si possono far corrispondere **a punti di una retta** sulla quale è stato introdotto un riferimento cartesiano

I numeri razionali **esauriscono** i punti della retta?

I **punti** di tale retta sono **tutti legati** ad un **numero razionale**?

Ci sono **punti** sulla retta, individuabili con costruzione geometrica, che **non sono individuabili con un numero razionale**: ad esempio per mezzo della diagonale del quadrato di lato unitario o della diagonale di un rettangolo di lati 1 e 2.

Applicando semplicemente il **Teorema di Pitagora**, nei due casi si ottiene rispettivamente  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{5}$



## Numeri e punti di una retta

- I numeri razionali **non** esauriscono i punti della retta
- lasciano *tanti punti inframmezzati* dalle immagini razionali stessi
- **L'insieme  $Q$ , che amplia  $Z$ , non ha una diversa potenza: è numerabile!**

0/1	-1/1	1/1	-2/1	2/1	-3/1	3/1	-4/1	4/1	-5/1	5/1	-6/1	6/1.....
0/2	-1/2	1/2	-2/2	2/2	-3/2	3/2	-4/2	4/2	-5/2	5/2	-6/2	6/2.....
0/3	-1/3	1/3	-2/3	2/3	-3/3	3/3	-4/3	4/3	-5/3	5/3	-6/3	6/3.....
0/4	-1/4	1/4	-2/4	2/4	-3/4	3/4	-4/4	4/4	-5/4	5/4	-6/4	6/4.....
0/5	-1/5	1/5	-2/5	2/5	-3/5	3/5	-4/5	4/5	-5/5	5/5	-6/5	6/5.....
0/6	-1/6	1/6	-2/6	2/6	-3/6	3/6	-4/6	4/6	-5/6	5/6	-6/6	6/6.....

.....

.....

0	-1	1	-1/2	-2	1/2	-1/3	2	1/3	-1/4	-3	2/3	.....
---	----	---	------	----	-----	------	---	-----	------	----	-----	-------



R. Dedekind  
1831 - 1916

- Occorre **ampliare l'insieme dei numeri razionali** per rimuovere il **problema della misura** delle grandezze, fissata un unità di misura.
- Alcuni punti della retta corrispondono ad estremi di **segmenti incommensurabili** rispetto all'unità di misura fissata.
- **Postulato di completezza** dei punti di una retta
- **Numeri reali come sezione dei numeri razionali**



“Dedekind's brilliant idea was to represent the **real numbers** by divisions of the rationals”

$\mathbf{Q}$  numeri razionali divisi in due classi  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , dette **sezioni di  $\mathbf{Q}$** , tali che :

- $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
  - ogni  $a \in \mathbf{A}$  è minore di ogni  $b \in \mathbf{B}$
  - $\mathbf{A}$  può avere elemento massimo  $a^*$ , oppure  $\mathbf{B}$  avere elemento minimo  $b^*$  (di solito si sposta  $b^*$  in  $\mathbf{A}$ )
  - **leggi di composizione** somma e prodotto
- ...**nascono i numeri reali  $\mathbf{R}$**



La collezione di tutte le possibili sezioni dei razionali, costituisce **R**:

- $(A, B)$  con  $a$  max in  $A$ , rappresenta il **numero reale razionale**  $a$
- $(A, B)$  senza max in  $A$ , definisce un *elemento nuovo*, il **numero reale irrazionale**
- **R** non è numerabile
- **R** è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta: **potenza del continuo**



- **equipotenza** di **R** e dei punti del segmento  $[-1,1]$ 
  - realizzazione di una corrispondenza biunivoca
- **non numerabilità** di **R**
  - si considerano tutti i numeri compresi tra 0 e 1, scritti in base decimale
  - si suppone siano ordinabili in una successione
  - si mostra che sempre se ne trascura almeno uno



- Rappresentazione binaria (due sole cifre: 0, 1)
- Rappresentazione in base m intero naturale qualsiasi (m cifre 0, 1, 2 ..., m-1)

$$(2679)_{10} = 9 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$$

$$(abcd)_m = d \cdot m^0 + c \cdot m^1 + b \cdot m^2 + a \cdot m^3$$

$$0 \leq a, b, c, d < m$$

Pensando alla base 10, i **razionali** hanno tutti una rappresentazione con un numero **finito o periodico** di cifre dopo la virgola; gli **irrazionali** dopo la virgola hanno sempre **infinite cifre non periodiche**



**[www.polimi.it](http://www.polimi.it)**

**[www.poliorientami.polimi.it](http://www.poliorientami.polimi.it)**

**[www.mate.polimi.it](http://www.mate.polimi.it)**

**<http://fds.mate.polimi.it>**

**[eventimate@mate.polimi.it](mailto:eventimate@mate.polimi.it)**

**[Luisa.rossi@polimi.it](mailto:Luisa.rossi@polimi.it)**