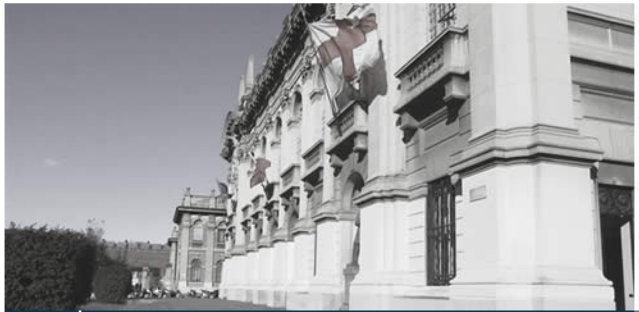


1 febbraio 2011
22 marzo 2011

Secondo Incontro

POLITECNICO DI MILANO





Le Funzioni

Incontri con allievi del Liceo Classico

Luisa Rossi Costa

Definizione

Siano X e Y insiemi di numeri reali:

La corrispondenza f: $X \rightarrow Y$ è **funzione** definita in X a valori in Y, quando associa ad ogni x in X , uno e un solo y

$y = f(x)$ *definita in* $X \subseteq R$ *a valori in* $Y \subseteq R$

La funzione è caratterizzata dalla legge *f* e dal suo insieme di definizione *X*

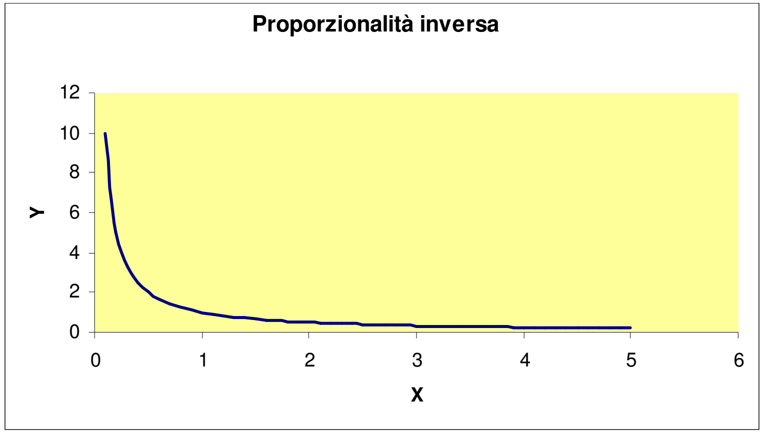


Grafico di una funzione

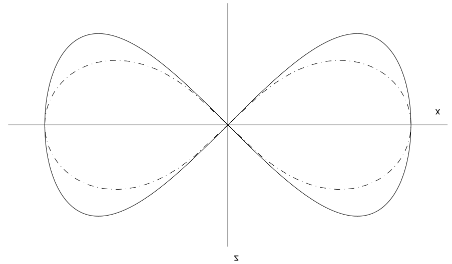
Sia $f: X \longrightarrow Y$, $y = f(x)$

Si dice ***grafico della funzione*** *nel piano cartesiano (x,y) il luogo di punti P di coordinate*

$P = (x,f(x))$ *con* $x \in X$

Si potrebbe utilizzare anche una rappresentazione cinematica, su due assi separati, x dove appare l'insieme di definizione e y dove invece si rappresentano i valori assunti f(x) (detti anche immagini), ma è meno espressiva.

Luoghi di punti o funzioni?



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad\qquad x^4 = x^2 - y^2$$

$$y=-5x+2 \qquad\qquad xy=1$$

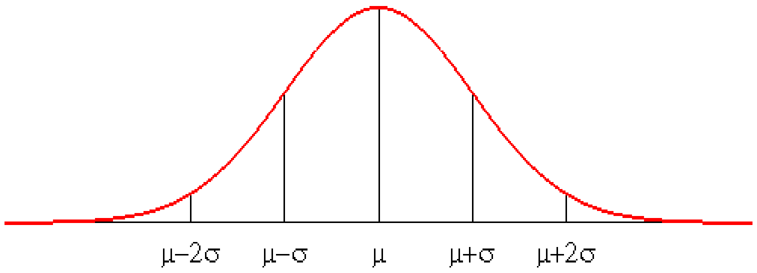
$$y=4x^2-1 \qquad\qquad x^2-y^2=1$$

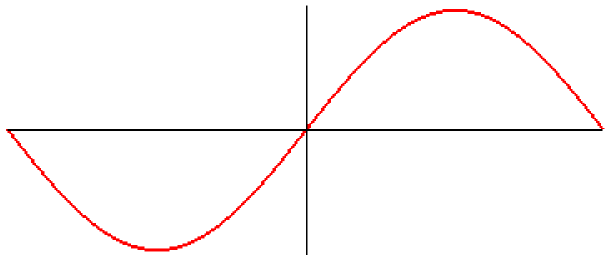
$$y=\begin{cases} -x^3 & per\ x<-1 \\ 2 & per -1\le x\le 0 \\ x-1 & per\ 0<x \end{cases} \qquad\qquad y=1/n^2 \quad n\in N\setminus\{0\}$$

La funzione $f: X \to Y$, definita nell'insieme X simmetrico rispetto all'origine, è

• **funzione pari** se $f(x) = f(-x)$,
il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y ;

• **funzione dispari** se $f(x) = -f(-x)$;
il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi





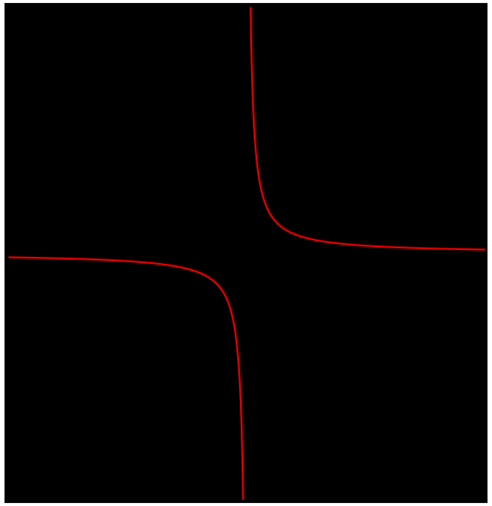
Funzioni monotone crescenti o decrescenti

$y=f(x)$ è ***monotona crescente*** *nel suo insieme di definizione X se,* ***per ogni coppia*** *di punti* $x_1 < x_2$

$f(x_1) \leq f(x_2)$ (*strettamente se* $f(x1) < f(x2)$)

$y=f(x)$ ***monotona decrescente*** *se* $f(x_1) \geq f(x_2)$

Attenzione *alla funzione*
$y = 1/x$
in $X=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ *!!*



Esempi

$$y = mx \qquad x \in R$$

$$y = |x| \qquad x \in R$$

$$y = x^2 \qquad x \in R$$

$$y = x^3 \qquad x \in R$$

$$y = -(x+3)^2 \qquad x \in R$$

$$y = (x-7)^3 \qquad x \in R$$

$$y = [x] \qquad \textit{parte intera di } x$$

Individuare per ciascuna funzione:

- Insieme di definizione
- Insieme immagine
- Eventuale simmetria
- Monotonia
- …….

f: $X \rightarrow Y$, è **funzione periodica** definita in X a valori in Y, se esiste un T tale che

$f(x)= f(x+T)$, per ogni x *di* $X \subseteq \mathbf{R}$

Se f(x) non è definita in un punto x allora non è definita in ogni punto* x^*+kT *con* k *intero relativo* ($k \in \mathbf{Z}$)

Per caratterizzare una **funzione periodica** basta fornire *f(x)* in un intervallo di ampiezza uguale al periodo T, o in un semiperiodo nel caso risulti pari o dispari.

Funzioni periodiche

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \tan x$$

$$y = \cot x$$

$$y = \begin{cases} 2x - 1 \quad in\,[0,4] \\ pari \\ periodo \quad T = 8 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2 \quad in\,(0,3) \\ dispari \\ periodo \quad T = 6 \end{cases}$$

Stabilirne l'insieme di definizione e disegnarne il grafico in due periodi

Continuità

Alcune funzioni prima incontrate hanno un *grafico che si disegna senza staccare la matita dal foglio o il gesso dalla lavagna*: si dicono ***continue.***

Altre hanno un grafico *composto da archi di linea disgiunti*: presentano ***punti di discontinuità.***

Di fatto per parlare di continuità o di discontinutà si deve ricorrere al concetto di **limite**… sopra è solo indicato un metodo intuitivo per riconoscere questa caratteristica della funzione.

Augustin L.Cauchy
1789-1857

Funzioni *bizzarre*

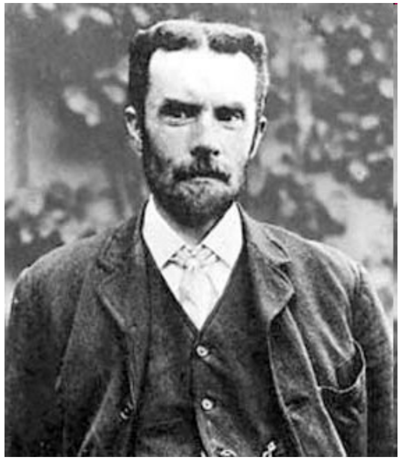
Funzione di Dirichlet

$$y = \begin{cases} 1 \quad se \quad x \quad \grave{e} \quad razionale \\ 0 \quad se \quad x \quad \grave{e} \quad irrazionale \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

1805-1859

Signum x

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} \quad se \quad x \neq 0 \\ 0 \quad se \quad x = 0 \end{cases} \qquad x \in R$$



1850-1925

Funzione di Heaviside (*a gradino*)

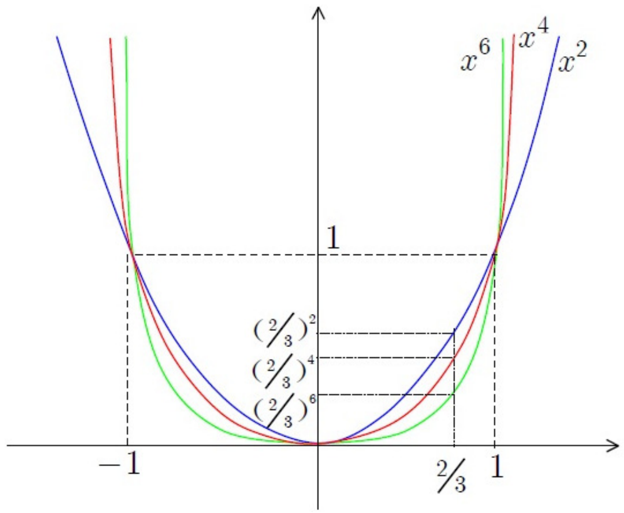
$$y = H(x) = \begin{cases} 1 \quad se \quad x > 0 \\ 0 \quad se \quad x < 0 \end{cases}$$

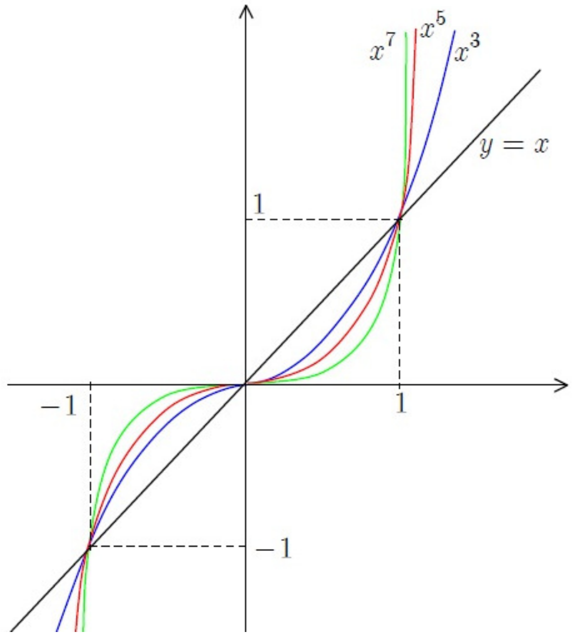
Le potenze intere di x: *y=x^n*

$y=f(x)=x^n$ è funzione definita in $X=R$ a valori in R

$Y=R$ se n è dispari; $Y=R^+$ se n è pari

Il grafico contiene sempre i punti (0,0) e (1,1)



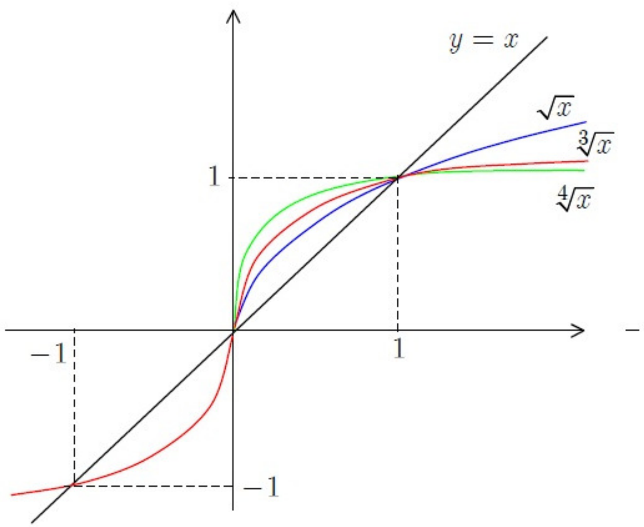


Le potenze frazionarie di x del tipo : $y=x^{1/n}$

$y=f(x)=x^{1/n}$ è funzione definita in

- *$X=R$ a valori in $Y=R$, se **n dispari***
- *$X=[0,+\infty)$ a valori in $Y=[0,+\infty)$, se **n è pari***

Al grafico appartengono sempre i punti (0,0) e (1,1)



Andamenti qualitativi

$$y = (x-5)^2$$

... parabola $y=x^2$ traslata in $x=5$

$$y = (x+7)^3$$

...cubica $y=x^3$ traslata in $x=-7$

$$y = x(x-5)^2$$

...stabilisci dove si annulla, il segno, come si comporta attorno agli zeri e per $x \to \mp\infty$,

$$y = x^2(x+7)^3$$

illustra l'andamento locale e poi raccorda.

*Le **funzioni polinomiali** sono sempre **continue** in R*

$$y = x^3(x-2)^2(x+3)$$

Funzione esponenziale y = a^x

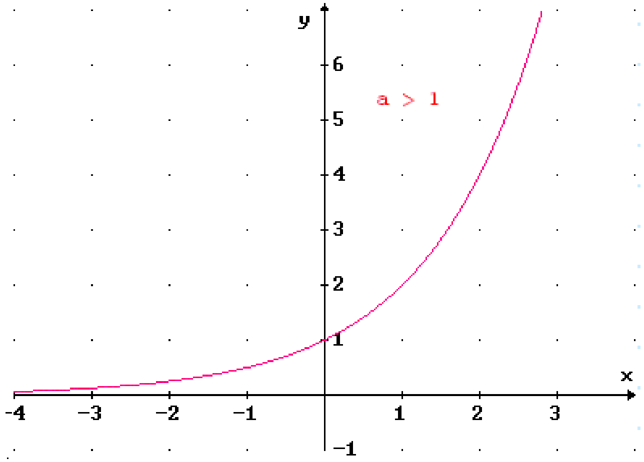
La base dell'esponenziale può essere solo positiva

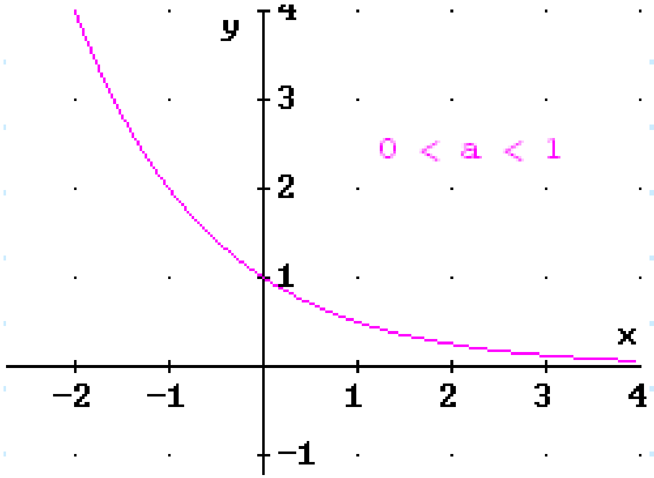
$a>0$ e *l'esponente x è un reale qualsiasi* $(x \in R)$

$a=1$ $\quad y = 1^x = 1$ *…è una retta*

$a>1$ *… è funzione crescente*

$0<a<1$ *….è funzione decrescente*



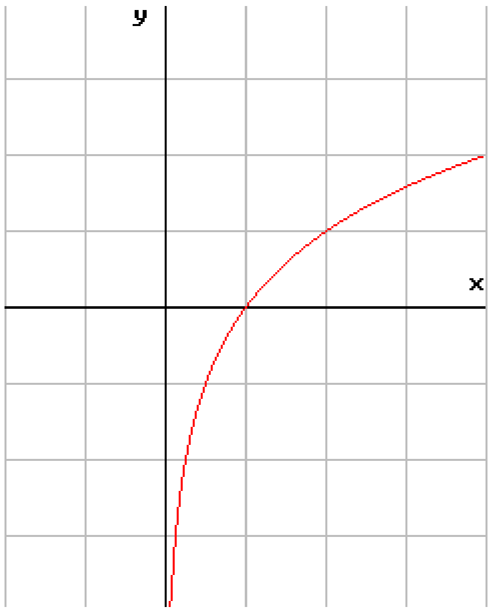


Funzione logaritmo $y = log_a x$

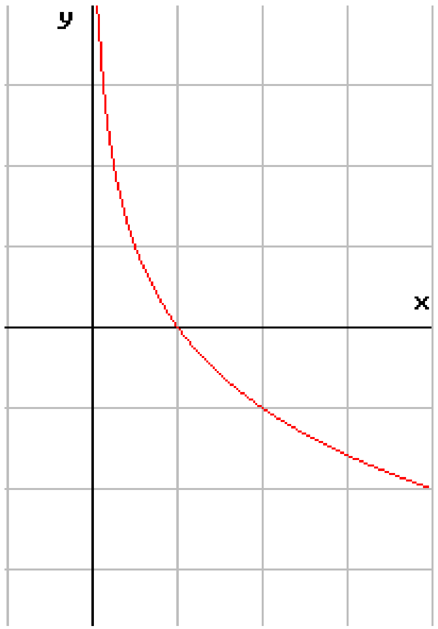
La funzione logaritmo ha **base** $a>0$ *con* $a\neq 1$;

l'**argomento** x può essere **solo positivo** .

L'**immagine** Y coincide con *R*.



$a>1$



$0<a<1$

John Napier
1550-1617