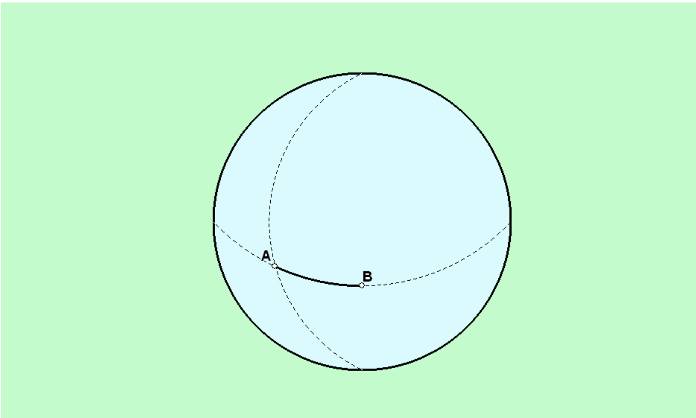
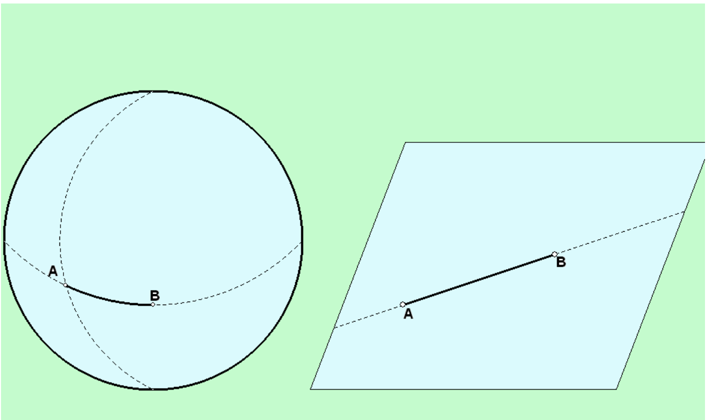
PARALLELISMI: GEOMETRIE EUCLIDEE E NON

Approfondimenti. A cura del Prof. Renato Betti del Politecnico di Milano

Lo spettacolo che abbiamo appena visto vuole dare l'idea che la geometria non si riferisce solo a quell'ambiente fisico, intuitivo, che comunemente chiamiamo "spazio".
Ogni problematica, con le variabili che la riguardano, dà luogo ad un proprio, autonomo, spazio nel quale ha senso prenderla in considerazione. Di conseguenza, anche la geometria, che è lo studio delle proprietà delle figure di questo spazio, si presenta in maniera ogni volta diversa.
Ad esempio, nella prima scena abbiamo visto che, se pensiamo agli spostamenti sulla Terra, abbiamo la percezione di muoverci lungo una retta, senza cambiare direzione, ma in realtà percorriamo un arco di circonferenza.
Allora lo spazio in cui si studiano questi fenomeni è una superficie sferica e il posto dei segmenti è tenuto dagli archi di cerchio massimo.

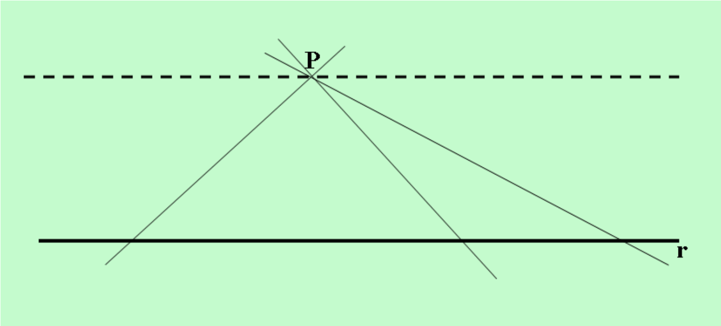


È chiaro che la geometria di una sfera, nella quale le "rette" hanno lunghezza finita, e la geometria di un piano, nel quale sono di lunghezza infinita, sono ben diverse.



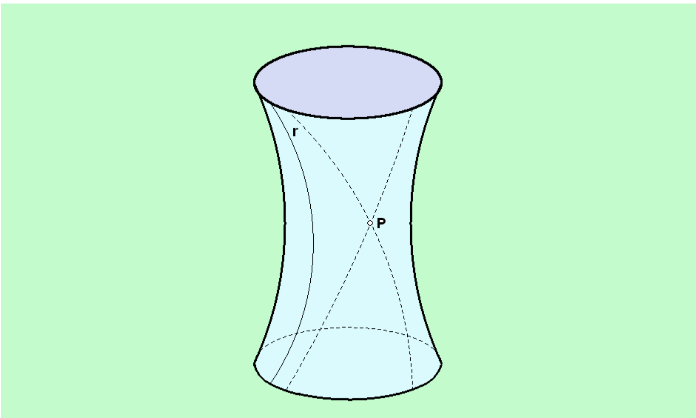
O anche, se pensiamo al moto di un corpo rigido, oltre alle consuete tre variabili spaziali (lunghezza, larghezza, altezza) occorre considerare il tempo. Allora è bene formalizzare il fenomeno come quello del moto di un punto che si trova in uno spazio a quattro dimensioni. E le proprietà geometriche avranno di conseguenza loro specifiche particolarità.
L'idea che lo studio di ogni fenomeno si possa ambientare in uno spazio opportuno, di fatto ha richiesto un lungo e difficile lavoro intellettuale.
Un tempo, nel mondo classico, si pensava ad un unico spazio e ad un'unica possibile geometria che descrive le proprietà delle sue figure.

A partire dall'inizio del III secolo avanti Cristo, questa geometria viene raccolta in alcuni libri della grande opera di Euclide "Gli elementi", opera che contiene tutto il sapere matematico dell'epoca e che rimarrà per due millenni uno dei testi più influenti della cultura scientifica.
In questo libro la geometria riceve una forma assiomatica rigorosa: nel caso della geometria piana, vengono fissati a priori cinque postulati, e le altre proprietà delle figure vengono rigorosamente dimostrate a partire da questi postulati.
Il fatto è che presto la comunità scientifica ritiene che uno dei cinque postulati – il quinto, il cosiddetto "postulato delle parallele" – non vada assunto a priori, ma debba essere dimostrato a partire dagli altri quattro. In sostanza, che si tratti di un teorema, non di un postulato.
Ai matematici che sono alla ricerca dei fondamenti della propria disciplina, queste distinzioni interessano perché vogliono conoscere con sicurezza la natura delle proprietà che stanno alla base. È in ballo la forma di conoscenza che è fornita dalla loro materia.
Cosa dice questo postulato?



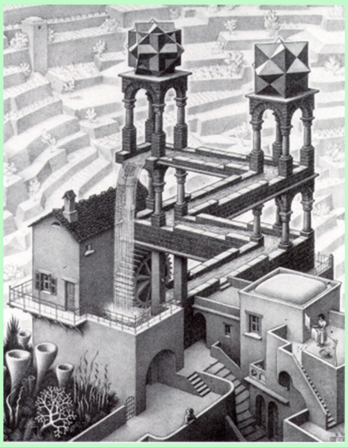
In maniera equivalente a quanto formulato da Euclide, dice che "nel piano, data una retta ed un punto che non le appartiene, fra tutte le rette che passano per il punto ne esiste una sola che è parallela alla retta data" (cioè che non ha con essa alcun punto in comune).

Un enunciato che sembra semplice. Tuttavia, nonostante l'impegno dei più grandi matematici, nel corso di duemila anni nessuno riesce a trovare una dimostrazione e, ad un certo punto, nel '700, si forma l'idea che questo – che ormai è conosciuto come "il problema delle parallele" – non abbia soluzione.
Di fatto noi oggi sappiamo che è proprio così: la dimostrazione cercata non esiste. Come si dice: è indipendente dagli altri postulati. Si può assumere che sia valido, e allora si ottiene una teoria geometrica che viene detta "euclidea", perché è proprio la geometria che aveva introdotto Euclide nei suoi Elementi. Ma lo si può anche negare, cioè si può assumere che sia valido il suo contrario e ottenere un'altra teoria geometrica, del tutto legittima, nel senso che è priva di contraddizioni se lo è la geometria euclidea.
Negare il postulato delle parallele, cioè negare una proprietà che parla di esistenza ed unicità di una retta, si può fare in due maniere diverse. Di conseguenza si ottengono due geometrie diverse che sono dette "non euclidee".
Se si assume un postulato che nega l'esistenza della parallela passante per un punto ad una retta data, si ottiene una geometria che viene detta "ellittica" e che, sostanzialmente è la geometria della sfera.
È facile vedere infatti che due cerchi massimi della sfera, che in questa geometria tengono il posto delle rette, hanno sempre due punti in comune, quindi in questa geometria non esistono parallele.
Se invece si assume un postulato che nega l'unicità della parallela passante per un punto e parallela ad una retta, allora si ottiene una geometria che viene detta "iperbolica", che sostanzialmente è la geometria di superfici cosiddette pseudosferiche.



Queste sono come le superfici sferiche ma hanno curvatura negativa (o raggio immaginario, anziché reale): dato un punto ed uno "pseudocerchio", che qui tiene il posto di una retta, esistono infiniti pseudocerchi passanti per un punto esterno e che non intersecano quello dato.

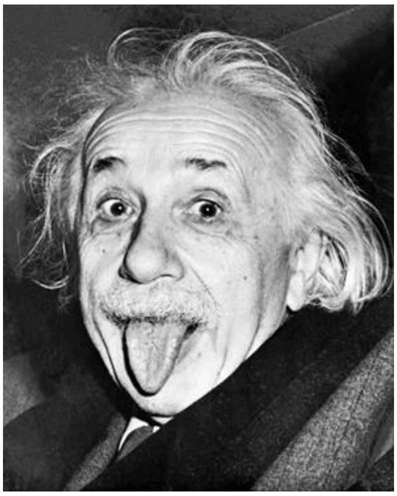
Una scena dello spettacolo, la seconda, presenta una storia nella quale i personaggi hanno intuito che quella delle parallele è una proprietà indipendente dagli altri postulati. Che non si può dimostrare a partire da questi. È solo una ipotesi, che si può assumere o di cui si può addirittura assumere la negazione. La storia è molto simile a quanto è realmente avvenuto, sebbene in epoca diversa: nella prima metà dell'800.
E la coscienza che il postulato delle parallele sia indipendente dagli altri postulati ha poi coinvolto e fatto discutere tutta la comunità matematica.
Perché? Perché la conclusione del "problema delle parallele" non era quello che ci si aspetta di solito da un risultato matematico. Era solo il cambiamento di punto di vista. Bisognava riguardare il problema in un altro modo: non, se la proprietà è vera o falsa e come la si può eventualmente dimostrare, ma se è necessaria oppure no per trattare certi problemi. Quali proprietà si dimostrano se la si assume come valida? E se al suo posto si utilizza un'altra proprietà, che cosa accade? Quali conseguenze si hanno, e soprattutto come è possibile rendersi conto che non ci saranno contraddizioni, cioè che in nessun caso sarà possibile dimostrare contemporaneamente una proprietà e la proprietà opposta.
Il problema non investe solo la geometria. Tutti i settori della matematica diventano teorie che si dicono "ipotetico-deduttive", per significare che si assumono certe ipotesi per le quali si è sicuri di non giungere a contraddizioni – ipotesi spesso originate dall'esperienza – ed a partire da queste si deducono in maniera rigorosa le conseguenze. Cambia la problematica? Allora cambiano anche le ipotesi da assumere e si ha una nuova teoria. Nel caso della geometria, cambia lo spazio nel quale si ambientano i dati e le ipotesi iniziali.
E allora, perché non pensare ad altre dimensioni per lo spazio nel quale si considerano i fenomeni? Del resto, ad esempio, è dall'inizio del '700 che i fisici invitavano a considerare il tempo come una quarta dimensione e la meccanica come una geometria a quattro dimensioni.
La terza scena dello spettacolo è dedicata ad illustrare il senso della quarta dimensione, con le sue conseguenze, a volte inquietanti (come nel caso di Amleto), o paradossali (come nel caso della casa ipercubica), o per noi che viviamo in tre dimensioni, impossibili da realizzare.
In una illustrazione di Escher, ad esempio, si vede un fenomeno impossibile nel nostro mondo tridimensionale: la risalita dell'acqua di una cascata. Questa è una rappresentazione artistica, ma il fenomeno non avrebbe ostacoli in uno spazio a quattro dimensioni.



Certo, lo spazio a quattro o più dimensioni è un costrutto intellettuale. Una comprensione intuitiva delle dimensioni superiori si può ottenere per analogia pensando al passaggio dalla seconda alla terza dimensione, come in quest'altra illustrazione di Escher in cui una figura bidimensionale prende corpo ed esce dal piano per poi tornare nella propria dimensione.

Così, gli spazi si moltiplicano e l'idea stessa di spazio perde la propria connotazione originaria. Ora è un prodotto della mente, anche se mai un prodotto arbitrario.
L'estensione raggiunta dalla geometria alla fine dell'800, insieme alla grande unità che ha ottenuto, le ha dato una nuova consapevolezza, nella quale sembrano definitivamente recisi i tradizionali e millenari legami con lo spazio della realtà fisica.
Eppure non è così. Di fatto i matematici non rinunciano a mantenere i contatti con il mondo fisico, che è comunque in grande evoluzione e, in quel periodo, sta affrontando nuovi problemi per i quali la classica geometria euclidea non è più adeguata.

E, dal canto loro, i fisici non rinunciano a cercare nelle astrazioni della matematica le strutture più convenienti per descrivere i fenomeni sempre più complessi che si presentano nelle loro ricerche: relativi al calore, alla propagazione della luce, all'elettricità, al magnetismo… e in generale a tutti i fenomeni radianti.
Ora c'è la possibilità di interpretare fenomeni che non hanno una soddisfacente rappresentazione geometrica nel tradizionale spazio euclideo, utilizzando l'ambiente più opportuno, sia riguardo alla struttura che alle dimensioni.
È noto ad esempio che, nella impostazione della teoria di Einstein, il primo requisito logicamente necessario è l'abbandono dell'idea che spazio e tempo esistano in modo naturale ed assoluto, indipendenti l'uno all'altro: nasce lo spazio-tempo o cronotopo, che ha quattro dimensioni. E per di più questo spazio, che incorpora e spiega i nuovi fenomeni della fisica, ricorre ad una struttura non euclidea.
E la nascita di tutto ciò si può far risalire ad un dubbio relativo alle rette parallele.



Renato Betti
Laureato in matematica, è docente di Geometria al Politecnico di Milano. I suoi interessi di ricerca riguardano soprattutto la "Teoria delle categorie" e le sue applicazioni alle strutture algebriche, logiche e geometriche. È interessato anche ai fondamenti della matematica ed ai problemi dell'informazione. Per questo svolge un'intensa attività divulgativa, in particolare come co-direttore del trimestrale di cultura matematica "Lettera Matematica Pristem". È autore di numerose pubblicazioni su riviste nazionali ed internazionali, oltre che di libri di testo. Curatore di raccolte scientifiche e del XVI volume dell'Enciclopedia Einaudi (1983). Socio corrispondente dell'Accademia Nazionale Virgiliana. Fra i suoi libri più recenti: "Lobačevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee" (Bruno Mondadori, 2005) e "Grandi matematici del '900" (a cura – in collaborazione con C. Bartocci, A. Guerraggio e R. Lucchetti – Springer-Italia).