

Algebra, geometria e inattese applicazioni

Ciro Ciliberto

MILANO POLITECNICO, 10 Giugno, 2009

Vorrei parlare ...

... di matematica solitamente ritenuta **astratta**: cioè **ALGEBRA** e **GEOMETRIA**, o, più precisamente, di **GEOMETRIA ALGEBRICA**. Anche se ...

ال جبر

al-ğabr in arabo significa **unione, connessione, completamento**, ma anche **aggiustare**, deriva dal nome del libro del matematico persiano arabo **Muhammad ibn Musa al-Kwarizmi** (780–850), intitolato **Al-Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala**, cioè **Compendio sul Calcolo per Completamento e Bilanciamento**, che tratta la risoluzione delle equazioni di primo e di secondo grado in vista di applicazioni a **problemi molto concreti**.



L'algebra ...

... infatti fu importata in occidente nel secolo XIII per motivi **assai pratici**, cioè per far di conto negli affari, principalmente da **Leonardo Fibonacci** (1170–1250), autore del **Liber Abaci** e **Practica Geometriae**.



Il primo a usare il termine **algebra** nel mondo occidentale fu il **maestro d'abaco** fiorentino **Raffaello di Giovanni Canacci**, autore dei **Ragionamenti di Algebra** (1490).

Geometria ...

... viene dal greco

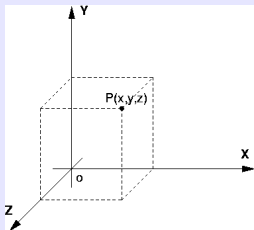
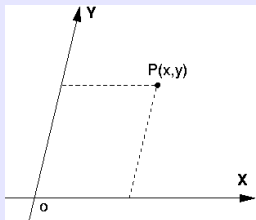
γεωμετρία

che significa **misura della terra**. Dunque le sue origini molto concrete sono fuori di ogni dubbio.



La Geometria Algebrica ...

... può pensarsi come la naturale prosecuzione del cammino intrapreso da **R. Descartes** (1596–1650) con l'introduzione delle **coordinate cartesiane**.



Ora prima un po' di storia, poi qualche nozione volta ad introdurre il concetto di **razionalità**, **che con Cartesio ci sta proprio bene!** Poi mi concentrerò su un paio di questioni volte a mostrare come questo concetto, apparentemente astratto, si ritrovi nell'affrontare problemi molto concreti.

Un po' di storia (I)

La Geometria Algebrica nasce come studio di **curve del piano** e **superficie dello spazio** definite da una **equazione polinomiale** e successivamente di **varietà** nello spazio definite da **sistemi di equazioni polinomiali**.

Alla base dell'interesse in queste questioni c'erano questioni derivanti dalle applicazioni alla **Fisica**, all'**Ingegneria**, all'**Architettura** e all'**Arte**.

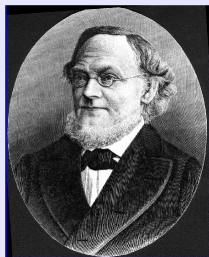
L'idea di **spazio proiettivo**, **ambiente naturale di lavoro** in Geometria Algebrica, trae origine dagli studi sulla **prospettiva** dei pittori del rinascimento e diviene strumento consolidato per le applicazioni nell'insegnamento di **G. Monge** (1746–1818) presso l'**École Polytechnique di Parigi**.



Un po' di storia (II)

Intorno alla metà dell'ottocento la Geometria Algebrica diviene disciplina autonoma.

Con **J. Plücker** (1801–1868) e **H. G. Grassmann** (1809–1877) si iniziano a studiare varietà algebriche in spazi proiettivi di dimensione qualunque, ad esempio le varietà i cui punti corrispondono ai sottospazi lineari di data dimensione di uno spazio proiettivo fissato, dette **varietà di Grassmann**, o **grassmanniane**.



Un po' di storia (III)

Questo indirizzo di ricerca trova successivamente ampio sviluppo presso la **Scuola Italiana di Geometria Algebrica** fondata da **L. Cremona** (1830–1903).



Contributi fondamentali allo studio delle varietà algebriche si devono a **G. Veronese** (1854–1917) e **C. Segre** (1863–1924), da cui prendono il nome due importanti classi di varietà.

La Scuola Italiana si sviluppa poi con **G. Castelnuovo** (1865–1952), **F. Enriques** (1871–1946) e **F. Severi** (1879–1961), i cui fondamentali contributi alla classificazione delle varietà algebriche gettano le basi per lo sviluppo della **Geometria Algebrica contemporanea**.

Lo SPAZIO PROIETTIVO COMPLESSO \mathbb{P}^n ...

... è ottenuto aggiungendo i **punti all'infinito**, cioè le **direzioni delle rette**, allo **SPAZIO AFFINE NUMERICO COMPLESSO**

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$$

i cui **punti** sono le n -ple ordinate (x_1, \dots, x_n) di numeri complessi.

Analiticamente, i **punti** di \mathbb{P}^n sono $(n + 1)$ -ple $[x_0, \dots, x_n]$ non nulle, date a meno di un fattore di proporzionalità, che si dicono **coordinate omogenee** del punto.

Allora \mathbb{A}^n si identifica con il sottoinsieme dei punti $[1, x_1, \dots, x_n]$ di \mathbb{P}^n .

L'insieme complementare è costituito dai punti del tipo $[0, x_1, \dots, x_n]$. Un tale punto si identifica con il punto **all'infinito**, cioè la **direzione**, delle rette parallele al vettore non nullo (x_1, \dots, x_n) .

Uno dei pregi dello spazio proiettivo è di essere **compatto**.

Prodotti di spazi proiettivi

Il prodotto di due spazi affini è uno spazio affine; il prodotto di due spazi proiettivi invece **non è** uno spazio proiettivo.

Tuttavia esso si immerge in modo naturale in un opportuno spazio proiettivo **più grande**.

Applicazioni di Segre e varietà di Segre

L'**applicazione di Segre** si definisce nel seguente modo

$$s_{m,n} : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$$

$$s_{m,n}([x_0, \dots, x_m], [y_0, \dots, y_n]) = [\dots, x_i y_j, \dots].$$

Essa è iniettiva. La sua immagine

$$S_{m,n}$$

è una **varietà algebrica**, che si chiama **varietà di Segre**.

Analogamente per il prodotto di più spazi proiettivi.

Varietà algebriche

Un sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{P}^N$ è **varietà algebrica** se esistono **polinomi omogenei**

$$F_i(x_0, \dots, x_N), \quad i = 1, \dots, h$$

tali che V coincida con l'insieme dei punti $[x_0, \dots, x_N]$ di \mathbb{P}^N le cui coordinate omogenee annullano tutti i polinomi F_i .

Nota bene: se un $(n+1)$ -pla (x_0, \dots, x_N) annulla un polinomio omogeneo, lo stesso accade anche per tutte le $(n+1)$ -ple ad essa proporzionali.

Le equazioni

$$F_i(x_0, \dots, x_N) = 0, \quad i = 1, \dots, h$$

si dicono **equazioni** della varietà V .

Equazioni delle varietà di Segre

I determinanti di ordine due subordinati a una matrice

$$Z = (z_{ij})_{i=0,\dots,m;j=0,\dots,n}$$

di variabili sono polinomi omogenei di grado 2 nelle z_{ij} .

La **varietà di Segre** $S_{m,n}$ ha per equazioni tali polinomi. Essa coincide con l'insieme delle classi di proporzionalità delle matrici di rango 1.

Ad esempio l'equazione

$$x_0x_3 - x_1x_2 = 0$$

definisce una **quadrica** nello spazio proiettivo a tre dimensioni, che è il **prodotto di Segre** $S_{1,1}$ di due rette proiettive \mathbb{P}^1 .



La **dimensione** di una varietà V è il **numero di parametri** da cui dipendono i suoi punti:

$$\dim(V) \geq N - \text{numero di equazioni che definiscono } V$$

Ad esempio:

- \mathbb{P}^n ha dimensione n ;
- $S_{m,n} = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ha dimensione $n + m$;
- una **curva piana** definita da una sola equazione in \mathbb{P}^2 ha dimensione 1;
- una **superficie** definita da una sola equazione in \mathbb{P}^3 ha dimensione 2.

Una varietà $V \subseteq \mathbb{P}^N$ di dimensione n è **unirazionale** se esiste un'applicazione suriettiva

$$f : \mathbb{P}^n \rightarrow V$$

definita da polinomi omogenei dello stesso grado.

Ossia V è unirazionale se è possibile **parametrizzare** i punti di V nel modo seguente

$$x_i = p_i(y_0, \dots, y_n), \quad i = 0, \dots, N$$

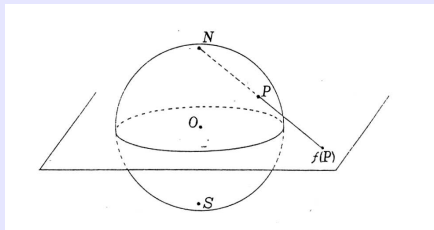
con p_i polinomi omogenei dello stesso grado
o, passando a coordinate affini

$$X_i = q_i(Y_1, \dots, Y_n), \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{con } q_i \text{ funzioni razionali.}$$

V è **razionale** se la parametrizzazione f è **generalmente invertibile** ossia invertibile su un aperto non vuoto.

Esempi

- gli spazi proiettivi e i loro sottospazi sono razionali;
- le varietà di Segre sono razionali;
- le **coniche** o in generale le **quadriche** irriducibili, definite da un unico polinomio irriducibile di grado 2, sono razionali: si possono parametrizzare razionalmente mediante la **proiezione stereografica**.

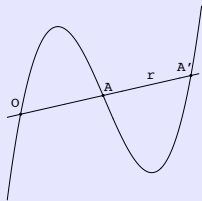
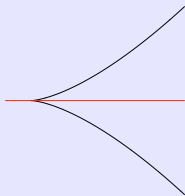
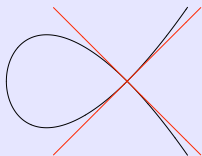


Il nome **proiezione stereografica** (dal greco $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\nu$ = corpo solido e $\gamma\rho\alpha\phi\eta$ = disegno) fu introdotto dal gesuita **F. d'Aquilon** (1567–1617), autore del geniale trattato di ottica **Opticorum libri sex**, illustrato con acqueforti di **P. P. Rubens** (1577–1640), pensato anche per **architetti, astronomi, naviganti, ingegneri militari, pittori**.

... e le curve di grado superiore?

Il **grado** di una curva è il minimo grado di una sua equazione e coincide col numero di punti a comune tra la curva e una retta **generale** del piano. Questo è il **Teorema di Bezout**.

- Le **cubiche singolari** sono razionali;
- Le **cubiche non singolari** NON sono razionali!



Come si fa a riconoscere la razionalità?

Per le curve si introduce un invariante, il **genere** g .

Se la curva è piana di grado d con δ **punti doppi**, si ha la **formula di Clebsch**

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$$

Teorema di Clebsch: una curva è razionale se e solo se $g = 0$.

Per le superficie si ha un teorema analogo, il **criterio di Castelnuovo** (1893).

Curve e superficie sono razionali se e solo se sono unirazionali.

Per le varietà di dimensione superiore ciò non è sempre vero, nè si hanno criteri generali di unirazionalità o razionalità. Il problema di riconoscere se una varietà è unirazionale o razionale è tuttora aperto.

Le varietà razionali, che apparentemente sembrano le più semplici, perchè più vicine di altre agli spazi proiettivi, in realtà non sono affatto tali, vista la difficoltà perfino di riconoscerle.

... due temi, il primo classico, il secondo recentissimo:

- integrazione di funzioni algebriche e **l'importanza di essere RAZIONALE**;
- algebra, geometria e ... biologia molecolare.

Il legame tra loro è fornito proprio dal concetto di razionalità e dalle tecniche della geometria algebrica, che, a dispetto della loro **astrazione** (o forse proprio a causa di questa!), hanno trovato in passato, e trovano ancora notevoli e talvolta **inattese** applicazioni in campi molto differenti.

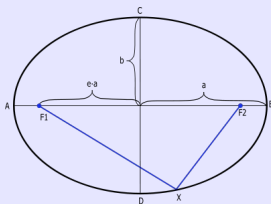
Gli integrali ellittici ...

... si presentano nel calcolo della lunghezza di un arco di **ellisse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } a > b > 0$$

che si può **parametricamente** rappresentare mediante le equazioni

$$x = a \sin \phi, \quad y = b \cos \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$



L'ellisse è il luogo dei punti X del piano la cui distanza da due punti fissi F_1, F_2 detti **fuochi**, è costante, uguale a $2a$. Se si indica con $2c$ la distanza tra i fuochi e si pone $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, allora $2a$ e $2b$ sono le lunghezze degli **assi**.

Il calcolo della lunghezza dell'arco di ellissi ...

„, si incontra in vari problemi di natura concreta Ad esempio:

- in **astronomia**: le orbite dei pianeti sono ellissi!
- in **architettura**: calcolo di aree di volte a botte di forma ellittica;
- in **statica**: flessione di aste caricate di punta;
- in **navigazione**: il calcolo della lunghezza delle geodetiche su un ellissoide di rotazione

Alcuni di questi problemi, ed altri ancora, si posero ai matematici fin dagli albori del calcolo differenziale e integrale.

Considerazioni sugli integrali ellittici si trovano in **J. Wallis** (1616–1703), che tra il 1643 e il 1689 fu **capo crittografo** del Parlamento del Regno Unito e successivamente della corte reale.

Altri precursori della teoria degli integrali ellittici furono **Giacomo** (1654–1705) e **Giovanni Bernoulli** (1667–1748).

Il calcolo della lunghezza dell'arco di ellisse...

... conduce all'integrale

$$\int \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx \quad \text{dove} \quad 0 < k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} < 1$$

Questo, a prima vista non è tanto dissimile dall'innocente

$$\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

che, si integra con la semplice sostituzione $x = \sin t$, ed è una **funzione elementare**.

Integrali dello stesso tipo di quest'ultimo sono

$$\log x = \int \frac{1}{x} dx, \quad \operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

Diversamente da questi integrali ...

... non esistono sostituzioni che coinvolgano funzioni elementari come seno, coseno, tangente, esponenziale e loro inverse, che semplifichino l'**integrale ellittico**

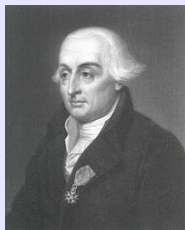
$$\int \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx$$

Proviamo a renderci conto della ragione profonda di questo fatto.

... fu il primo ad osservare che gli oggetti di cui ci stiamo occupando rientrano nella classe molto generale di integrali della forma

$$\int R(x, \sqrt{f(x)}) dx$$

dove $R(x, y)$ è una **funzione razionale**, e $f(x)$ è un polinomio.



Qui entrano in gioco geometria e razionalità!

Consideriamo la **curva piana** C di equazione

$$y^2 = f(x).$$

Se C è **razionale**, allora può **rappresentarsi parametricamente** mediante equazioni del tipo

$$x = p(t), \quad y = q(t), \quad \text{con } p(t), q(t) \text{ funzioni razionali}$$

Sostituendo queste espressioni in $\int R(x, \sqrt{f(x)})dx$, esso diventa del tipo

$$\int R(p(t), q(t))p'(t)dt$$

cioè un integrale di funzione razionale, **che si può esprimere in termini di funzioni elementari**.

Questo è il caso dell'integrale

$$\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

in cui C è una **conica**.

Invece, per l'integrale ellittico ...

$$\int \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{(1 - k^2 x^2)(1 - x^2)}}{1 - x^2} dx$$

la curva C di equazione

$$y^2 = (1 - k^2 x^2)(1 - x^2)$$

non è razionale, e questa è la ragione per cui l'integrale non può esprimersi in termini di funzioni elementari.

Gli integrali che abbiamo considerato rientrano nel tipo ancora più generale

$$\int R(x, y) dx$$

con $R(x, y)$ funzione razionale e x e y sono legati da una relazione del tipo

$$g(x, y) = 0$$

con g polinomio irriducibile, che definisce una **curva piana** Γ .

Questi integrali si dicono **abeliani**.

Contributi alla teoria degli integrali abeliani

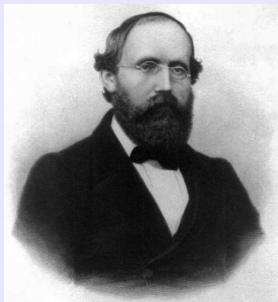
- Giulio de' Toschi, conte di Fagnano (1682–1766);
- L. Euler (1707–1783);
- A. M. Legendre (1752–1833);
- C. F. Gauss (1777–1855).



- E. Galois (1811–1832);
- C. G. Jacobi (1804–1851);
- N. Abel (1802–1829).



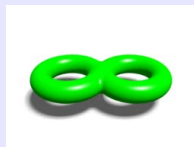
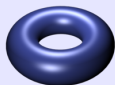
Il contributo decisivo di B. Riemann (1826–1866)



Riemann sposta definitivamente l'attenzione dagli oggetti analitici, cioè gli integrali abeliani, all'**oggetto geometrico** costituito dalla curva algebrica Γ sul campo complesso cui essi sono legati.

... presuppone l'esistenza di un **modello liscio** X per Γ , che è una curva **senza singolarità** in qualche **spazio proiettivo** \mathbb{P}^N .

Il modello liscio X , dal punto di vista topologico, è una superficie orientabile compatta, omeomorfa ad una sfera con un certo numero g di **manici** attaccati.



Il numero g è denominato da Riemann **numero di classe** (Klassenzahl) della curva, mentre un po' più tardi verrà detto **genere** (Geschlecht) da A. Clebsch (1833–1872), ed è proprio l'invariante di cui abbiamo già parlato.

Superficie di Riemann

La curva algebrica non singolare X ha una **struttura di varietà complessa**, oggi detta **superficie di Riemann**. Su X si può effettuare il calcolo differenziale e quello integrale come su \mathbb{C} : gli integrali abeliani sono integrali di forme differenziali razionali su X .

Se $g = 0$, siamo nel **caso razionale**: gli integrali abeliani sono integrali di funzioni razionali sulla **sfera di Riemann** \mathbb{P}^1 , e si esprimono in termini di funzioni elementari. Il caso $g = 1$ dà luogo agli **integrali ellittici**.

Se $g > 0$, gli integrali abeliani sono **funzioni plurivoche** su X . Il loro studio richiede l'introduzione di una **varietà algebrica**

$$J(X) = \mathbb{C}^g / \Lambda, \quad \text{dove } \Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$$

di dimensione g , la **varietà jacobiana** di X , che ha anche una struttura di gruppo abeliano, cioè è un **toro complesso**.

Nel **caso ellittico** $g = 1$ si ha

$$X = J(X)$$

Dopo Riemann ...

... la teoria venne ulteriormente geometrizzata da A. Clebsch, il quale tradusse in termini algebrico-geometrici i concetti basilari introdotti da Riemann.



Le applicazioni di questa teoria ad altre parti della matematica sono molteplici, ad esempio alla **teoria dei numeri**. Un ruolo primario giocano le **curve ellittiche** (cioè quelle di genere $g = 1$) nella famosa dimostrazione di **R. Taylor** e **A. Wiles** dell'**Ultimo Teorema di Fermat**.

Di recente lo studio delle curve ellittiche in teoria dei numeri ha trovato notevolissime applicazioni alla **crittografia a chiave pubblica**.

Forse Wallis si sarebbe interessato nell'apprendere che la matematica di cui si era occupato nel **secolo XVII** avrebbe avuto, in un **lontano futuro**, importanti applicazioni al suo lavoro di crittografo.

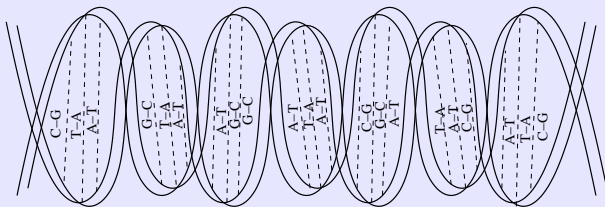
Ora cambiamo scenario e passiamo alla biologia

Il genoma umano è costituito da **acido desossiribonucleico (DNA)** ...

... che ha la struttura di una **doppia elica** formata da circa 3 miliardi di coppie (circa 700 megabytes di informazione, quanta ne può essere memorizzata in un CD Rom) di **basi complementari**:

(A**denina**, T**imina**), (C**itosina**, G**uanina**).

La **struttura primaria** del genoma si può modellare come una **sequenza di lettere** tratta dall'alfabeto $\Omega\{A, C, G, T\}$.



Sequenze biologiche

Alcuni tratti del genoma codificano degli elementi fondamentali per la vita cioè le **proteine**, catene di **amminoacidi**, contenute nel DNA in tratti detti **geni**.

La successione delle basi in un segmento di DNA, quella degli amminoacidi in una proteina, ecc. sono esempi di **sequenze biologiche**.

Importanti problemi sono il **riconoscimento** e l'**estrazione** dell'informazione codificata in una sequenza biologica.

Esempi

- 1 Distinguere la parte di un gene che codifica una **proteina** dalla parte non codificante.
- 2 Segmentare una porzione di DNA in frazioni con diverse funzioni.
- 3 Allineare porzioni di DNA appartenenti a specie diverse.
- 4 Costruire un **albero filogenetico**.
- 5 Riconoscere **sequenze ultraconservate**.

Modelli probabilistici e modelli deterministici

Nel corso del novecento si sono affermati, in alternativa ai **modelli deterministici** classici, **modelli probabilistici** per la descrizione di fenomeni fisici (**meccanica quantistica** e **meccanica statistica**).

Prescindendo da considerazioni di natura filosofica, l'uso dei modelli probabilistici, anche nella biologia, risulta di **grande utilità pratica**.

Questi modelli, per la natura stessa dei problemi trattati, hanno **carattere discreto** e un **contenuto combinatorico e algebrico** che ha richiesto l'uso e in alcuni casi la creazione di raffinate tecniche algebrico-geometriche. Si tratta dunque di un quadro completamente nuovo rispetto al passato.

Per discutere i modelli impiegati nella descrizione dell'evoluzione delle sequenze biologiche è necessario far uso di alcuni concetti di **calcolo delle probabilità**.

Lancio di una moneta

Quando si comincia a parlare di probabilità la prima cosa che viene in mente è il risultato del **lancio di una moneta**.

Sia p la probabilità di **osservare testa** ($0 \leq p \leq 1$). La probabilità di **osservare croce** è quindi $1 - p$. Se $p \neq \frac{1}{2}$ la moneta *è truccata*.

Come si fa a **stimare** p , e quindi a capire se la moneta è truccata? Si può applicare il principio di **massima verosimiglianza**, basato sulla seguente:

Assunzione fondamentale

Gli esiti dei lanci sono **indipendenti**, ovvero l'esito di ogni lancio non dipende da quello degli altri.

Stima di massima verosimiglianza

Lanciamo ripetutamente la moneta ottenendo ad esempio

TCCTCTTCTCCTTT

La probabilità di osservare 8 teste e 6 croci in 14 lanci, come nella sequenza osservata, è

$$L(p) = p^8(1 - p)^6.$$

Stima di massima verosimiglianza

La **stima di massima verosimiglianza** di p è il valore che rende massimo $L(p)$, nell'intervallo $[0, 1]$. Nell'esempio vale $\frac{4}{7}$.

Modelli probabilistici per il DNA

In questi modelli il dato osservato è una successione di lettere dell'alfabeto

$$\Omega = \{A, C, G, T\}.$$

Il modello più semplice è il modello dell'urna.

Un'urna contiene n_A palline marcate con A , e analogamente per n_C , n_G e n_T . Per generare una sequenza si pensi di: estrarre una pallina, annotare la marca, rimettere la pallina nell'urna, agitare bene e ripetere.

A questo modello è associata la probabilità

$$p_A = \frac{n_A}{n_A + n_C + n_G + n_T}$$

di estrarre una pallina contrassegnata con A , e analogamente per le altre.

Poiché

$$p_A + p_C + p_G + p_T = 1$$

il modello dell'urna dipende da tre parametri essenziali.

Modelli di A. A. Markov (1856–1922) (I)

Il modello dell'urna è **poco utile** per descrivere le sequenze di DNA. Più appropriato è un modello in cui l'urna da cui si pesca viene scelta sulla base di **un processo di Markov**.

Consideriamo **due piatti** contrassegnati \mathcal{T} e \mathcal{C} . **Su ogni piatto c'è un'urna** contenente palline marcate A, C, G, T , e **una moneta** con i simboli \mathcal{T} e \mathcal{C} sulle facce. Le monete sui piatti sono **truccate in maniera diversa**. La probabilità $p(X, \mathcal{Y})$ di estrarre la marca X dall'urna \mathcal{Y} è funzione dei numeri $n_{X, \mathcal{Y}}$ di palline marcate X nell'urna \mathcal{Y} .

- **Inizializzazione**: Si lancia una **terza moneta** per scegliere il piatto da cui cominciare.
- **Iterazione**: Si pesca una pallina dall'urna sul piatto corrente, **si annota la marca**, **si lancia la moneta sul piatto corrente per scegliere il nuovo piatto**, **si ripete**.

Modelli di Markov (II)

Questo processo introduce un **MECCANISMO DI DIPENDENZA** nel processo di scelta.

La scelta del piatto **dipende SOLO dalla scelta al passo precedente**.
Si tratta di una **catena di Markov**.

È questo un cosiddetto **modello di Markov** che si può **utilmente** impiegare per descrivere **alcuni aspetti** delle sequenze biologiche.

Esso dipende da **9** parametri indipendenti, la cui stima si può effettuare col principio di massima verosimiglianza.



Modelli di Markov a stati nascosti

Nella pratica c'è spesso l'esigenza di considerare, in un modello probabilistico, **stati nascosti**, cioè stati **non osservabili**, da cui dipendono le osservazioni.

Ad esempio l'esito **osservato** nelle prove d'esame dipende dall'umore **non osservabile** dell'esaminatore.

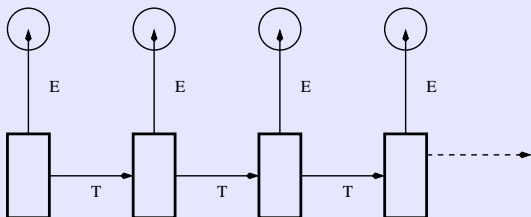
Questi modelli vengono introdotti con lo scopo principale di **stimare gli stati nascosti** a fronte delle osservazioni.

L'esempio precedente dà luogo ad un modello a stati nascosti quando si pensi di osservare solo le marche delle palline estratte, **senza sapere** da quale urna vengono estratte, cioè senza conoscere l'esito del lancio delle monete che determinano l'urna da cui estrarre le palline.

Le catene di Markov nascoste ...

... sono **in generale** descritte dai dati seguenti:

- 1 L'alfabeto $N = \{n_1, \dots, n_h\}$ degli **stati nascosti**.
- 2 L'alfabeto $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ dei **simboli visibili**.
- 3 Il vettore $p = (p_1, \dots, p_h)$ delle **probabilità iniziali**: p_i è la probabilità che lo stato iniziale sia n_i .
- 4 La matrice $T = (t_{ij})$ di **transizione** tra gli stati nascosti: t_{ij} è la probabilità di passare dallo stato n_i allo stato n_j .
- 5 La matrice $E = (e_{is})$ di **emissione**: e_{is} è la probabilità che lo stato n_i emetta il simbolo v_s .



Probabilità in una catena di Markov nascosta

Successione degli **stati nascosti**

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad \sigma_i \in N$$

Successione degli **stati visibili**

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \quad \tau_j \in V$$

La **probabilità** di osservare τ in corrispondenza di σ è il **monomio**

$$p_{\sigma\tau} = p_{\sigma_1} e_{\sigma_1\tau_1} t_{\sigma_1\sigma_2} e_{\sigma_2\tau_2} t_{\sigma_2\sigma_3} e_{\sigma_3\tau_3} \cdots t_{\sigma_{n-1}\sigma_n} e_{\sigma_n\tau_n}$$

La **probabilità** di osservare τ **qualunque siano gli stati nascosti** è il **polinomio**

$$p_{\tau} = \sum_{\sigma \in N^n} p_{\sigma\tau}$$

La formula polinomiale

$$p_{\tau} = \sum_{\sigma \in N^n} p_{\sigma\tau}$$

per la probabilità nel modello di Markov a stati nascosti fa entrare in gioco l'algebra e, di conseguenza, la geometria algebrica!

In generale, esiste un'ampia classe di modelli probabilistici discreti, i cosiddetti modelli grafici, in cui aspetti algebrici e combinatorici interagiscono in maniera analoga prestandosi ad utili e suggestive interpretazioni geometriche.

Discutiamo alcuni esempi di questi modelli.

Il modello di indipendenza

Consideriamo il grafo



A ciascuno dei due vertici è associato un alfabeto di due simboli $\{E, I\}$ e le probabilità $p_E^{(i)}, p_I^{(i)}$ di osservare E oppure I nel vertice i .

Il **modello di indipendenza** assegna alle quattro possibili osservazioni le probabilità, date da **monomi**, indicate nella seguente tabella

EE	EI	IE	II
$p_E^{(1)} p_E^{(2)}$	$p_E^{(1)} p_I^{(2)}$	$p_I^{(1)} p_E^{(2)}$	$p_I^{(1)} p_I^{(2)}$

Lo spazio delle distribuzioni di probabilità sulle possibili osservazioni $\{EE, EI, IE, II\}$ è l'insieme Δ delle quaterne (x_0, x_1, x_2, x_3) di numeri reali tali che

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 0, \dots, 3; \quad x_0 + x_1 = x_2 + x_3 = 1.$$

Il modello di indipendenza seleziona in Δ il sottoinsieme dato dalla **equazione algebrica**

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0.$$

Il modello di indipendenza (II)

Nella sua versione più generale il **modello di indipendenza** è associato al grafo con m vertici



Al vertice i è associato un alfabeto di $n_i + 1$ simboli $a_j^{(i)}$, $j = 0, \dots, n_i$, e le probabilità $p_j^{(i)}$ di osservare $a_j^{(i)}$ in tale vertice.

Il **modello di indipendenza** assegna all'osservazione $a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_m}^{(m)}$ la probabilità data dal **monomio**

$$p(i_1, \dots, i_m) = p_{i_1}^{(1)} \cdots p_{i_m}^{(m)}$$

Lo spazio delle distribuzioni di probabilità sulle possibili osservazioni è contenuto nell'insieme Δ delle $(n_1 + 1) \dots (n_m + 1)$ -ple

$$(x_{i_1 \dots i_m}), \quad i_j = 0, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Il modello di indipendenza seleziona in Δ un sottoinsieme dato da un **sistema di equazioni algebriche** omogenee e di secondo grado.

Ad esempio, se $m = 2$ l'insieme di equazioni si compendia in

$$\text{rk}(x_{ij}) = 1$$

Questi sistemi di equazioni definiscono le **Varietà di Segre**.

Un semplice modello di dipendenza (I)

Nel grafo



a ciascuno dei tre vertici è associato un alfabeto

0	a_0, \dots, a_h
1	b_0, \dots, b_n
2	c_0, \dots, c_m

I **parametri** del modello sono i seguenti:

- Le probabilità p_0, \dots, p_h di osservare a_0, \dots, a_h in 0.
- La matrice T di tipo $n \times h$, dove t_{ij} è la probabilità di osservare b_i in 1 se è stato osservato a_j in 0.
- La matrice S di tipo $m \times h$, dove s_{ij} è la probabilità di osservare c_i in 2 se è stato osservato a_j in 0.

Questo modello, in cui 0 è **stato nascosto**, assegna all'osservazione (b_i, c_j) la probabilità data dal **polinomio**

$$p_{ij} = \sum_{\alpha=0}^h p_{\alpha} t_{i\alpha} s_{j\alpha}.$$

Un semplice modello di dipendenza (II)

Lo spazio delle distribuzioni di probabilità sulle possibili osservazioni di questo modello è l'insieme Δ delle $(n+1)(m+1)$ -ple

$$(x_{ij}), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

Il modello seleziona in Δ un sottoinsieme dato ancora da un sistema di equazioni algebriche omogenee compendiate in

$$\text{rk}(x_{ij}) \leq h + 1$$

Anche questi sistemi di equazioni definiscono varietà algebriche notevoli, ossia **Varietà di spazi secanti le varietà di Segre** $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Questo modello si può generalizzare considerando il grafo



Dal punto di vista algebrico–geometrico questo corrisponde a considerare **varietà di spazi secanti a prodotti di Segre con più fattori**.

Varietà algebriche associate a catene di Markov

Nelle catene di Markov nascoste, le espressioni algebriche per le probabilità **parametrizzano** varietà algebriche **razionali**.

Molte di queste varietà non sono state precedentemente studiate e offrono **problemi interessanti alla geometria algebrica**. Ad esempio, un problema particolarmente rilevante è la determinazione di un **sistema di equazioni**.

Viceversa, recenti **tecniche combinatoriche e computazionali** in geometria algebrica (**basi di Gröbner**, **geometria torica**, **geometria tropicale**) suggeriscono algoritmi per risolvere i problemi di **stima dei parametri** e verifica di **adeguatezza del modello**.

... spero di aver fatto intuire, con gli argomenti trattati (altri ancora se ne sarebbero potuti scegliere!), come, pur essendosi munite nel corso dei loro sviluppi di approcci astratti, concetti sottili e tecniche raffinate, **algebra** e **geometria** non hanno tradito la loro **origine e natura concrete**, riuscendo ad essere adoperate per affrontare problemi di grande utilità.

Anzi, è mia convinzione che sia proprio la **natura astratta della matematica** a renderla estremamente efficace per affrontare problemi difficili e diversi.

Ma è anche utile sottolineare come spesso sia proprio dai problemi pratici che vengono alla matematica stimoli e suggerimenti per sviluppi di grande rilevanza per il progresso di questa disciplina.