RAPPRESENTAZIONI e PROBLEM SOLVING

Rosa Iaderosa – Chiara Andrà
Università del Piemonte Orientale

Seminario FDS
Milano, 14 dicembre 2022

Rappresentazioni esterne e problem solving

Il seminario si propone di analizzare **rappresentazioni esterne** *spontanee* o *indotte* messe in atto da studenti della scuola secondaria di secondo grado durante la risoluzione di problemi

Rappresentazioni esterne in matematica

Molteplici studi analizzano l'importanza delle *rappresentazioni esterne* per il ruolo che svolgono nell'insegnamento-apprendimento della matematica.

Esse intervengono in un processo continuo tra ciò che il soggetto rappresenta e le immagini mentali che si formano nella sua mente

Duval, 1988

Le rappresentazioni esterne sono oggetto di studio

In matematica le rappresentazioni esterne (*figure, tabelle, schemi a frecce, grafi, grafici, ecc.)* non sono generalmente spontanee, necessitano a loro volta di essere apprese.

Dunque si crea quello che Duval chiama il "*paradosso cognitivo*" legato ad esse, in quanto sono nello stesso tempo oggetto e strumento di apprendimento e concettualizzazione.

Ciò, come vedremo, interferisce con la capacità di risolvere problemi.

Duval, 1988

Nelle attività di risoluzione di problemi

Spesso le rappresentazioni esterne, oltre a costituire un importante strumento attraverso cui avviene l'*appropriazione* del problema da parte dell'allievo, e quindi una vera comprensione della situazione analizzata, possono svolgere un ruolo fondamentale: possono *fare da ponte per l'elaborazione di una strategia risolutiva*.

Esistono tuttavia anche *rappresentazioni spontanee* che il soggetto elabora e che in qualche modo testimoniano l'evoluzione dei suoi processi di pensiero rispetto alla pianificazione di una strategia risolutiva.

A volte si trovano *schemi personali* (non necessariamente rivolti alla comprensione di altri) che riflettono il processo di pensiero utilizzato. Spesso esse sostituiscono anche un'esplicitazione verbale della risoluzione, o comunque coesistono con questa in un intreccio tra registro verbale e iconico, o grafico-simbolico.

Roth, 2003

Osservando e analizzando…

Nell’osservare e studiare i ragazzi, durante laboratori e altre attività, realizzate con studenti della scuola secondaria di secondo grado, ci è parso evidente come le fasi di *appropriazione* e *risoluzione* di un problema spesso siano condizionate in maniera determinante dalle rappresentazioni utilizzate. *Non sempre però esiste una correlazione positiva tra la rappresentazione utilizzata e il successo nella risoluzione di un problema.*

Gli allievi utilizzano dunque in modo *più o meno proficuo* le rappresentazioni…

I materiali prodotti dagli allievi e presentati nel seminario si propongono di mostrare alcune di queste rappresentazioni, e l'utilizzo positivo, o negativo, che ne consegue.

Essi si inquadrano nelle seguenti domande di ricerca:

- *esistono e quali sono le possibili correlazioni tra il tipo di problema analizzato, come è posto, e le rappresentazioni usate per risolverlo?*
- *può essere utile e significativo impostare la didattica del problema anche in funzione delle rappresentazioni che esso favorisce?*

Esempi in contesto geometrico

alcune ricerche recenti, ma anche più remote, hanno mostrato che il *modello della linearità*, molto forte negli allievi della fascia 13-15 anni, prevale anche su strategie ulteriori suggerite dal disegno.

Rappresentazioni geometriche nella modellizzazione in matematica

Ad esempio, da alcune ricerche emerge che quando gli studenti elaborano **strategie** per risolvere problemi di modellizzazione in contesto **geometrico**, la rappresentazione può provocare una over-generalizzazione del modello lineare.

Gli studenti, infatti, soprattutto nei primi anni della scuola secondaria di secondo grado, non riconoscono il modello non-lineare, perché l'idea di **linearità** è tanto forte da indurre a utilizzarla perfino quando il disegno porterebbe esplicitamente a pensare diversamente.

Schukajlow, 2020

Un problema del Rally Matematico Transalpino

Citiamo qui una ricerca dell'anno 2005, elaborata dal gruppo di ricerca del Rally Matematico transalpino, che già anticipava i risultati degli studi più recenti citati: spesso gli allievi della scuola secondaria di primo grado e dei primi anni della secondaria di secondo grado elaborano, in ambito geometrico, rappresentazioni di linearità, anche di fronte a relazioni che non sono lineari, quali i rapporti tra le aree di figure omotetiche, o in generale simili.

Ciò è stato provato in particolare dalla sperimentazione del seguente problema:

www.armtint.eu F.Jaquet, 2005

LOGO *(XIII RMT)*

Una grande impresa internazionale di attività ricreative ha creato un logo autoadesivo per la sua pubblicità.

Il modello «Mini» di 24 cm di altezza.

Il modello «MAXI», di 60 cm di altezza.

I due modelli vengono stampati su fogli di plastica con colori cangianti e con riflessi metallizzati, poi ritagliati con la pressa e spediti a lotti di 10, 20, 40, 50 o 100 modelli.

Un lotto di 100 modelli «Mini» pesa 450 g.

Quanto pesa un lotto da 40 modelli «MAXI»?

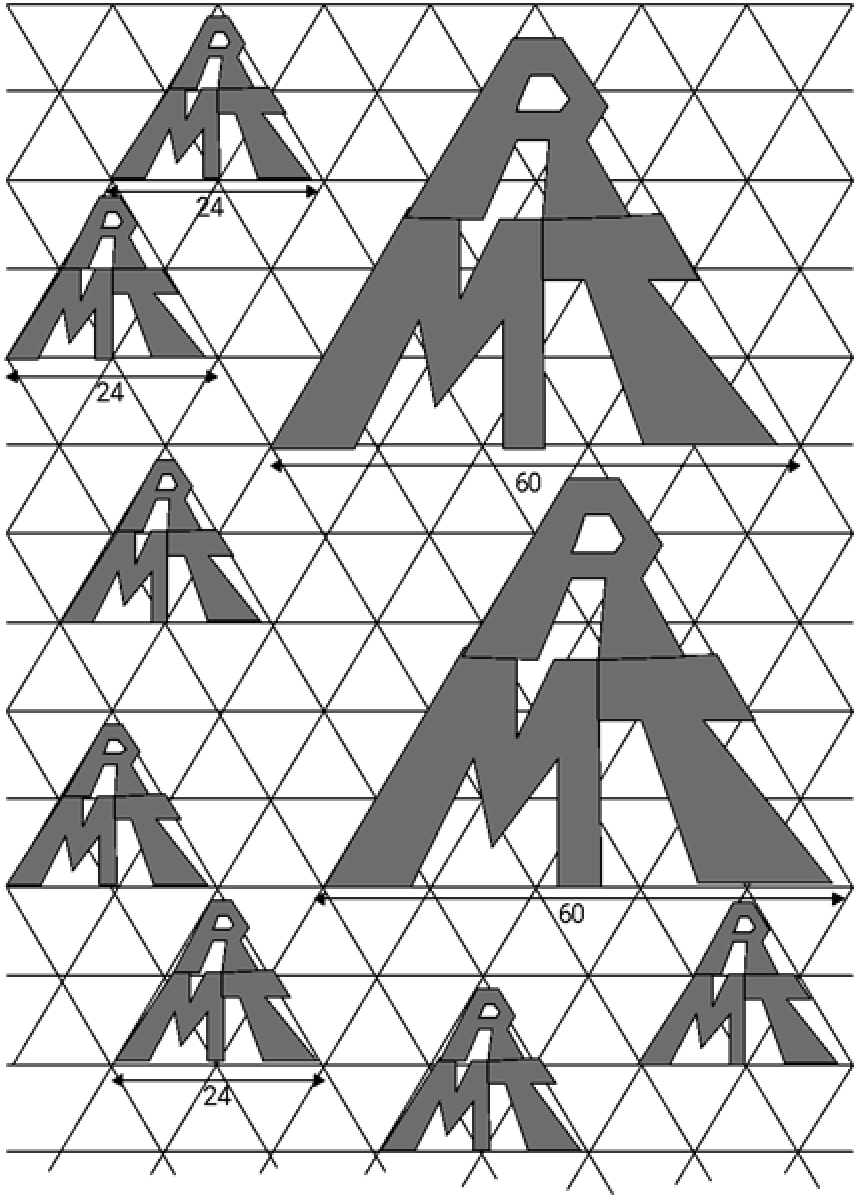
Spiegate il vostro ragionamento.

N.B. *in questa prima versione del problema non c'erano rappresentazioni contenute nel testo*

I risultati

In una prima sperimentazione, durante la prova del RMT in cui il problema era inserito, in quasi tutti gli elaborati era stata stabilita una relazione di linearità tra le altezze delle due figure (24 e 60) e i pesi dei due lotti, mentre la proporzionalità esiste tra le aree e i pesi.

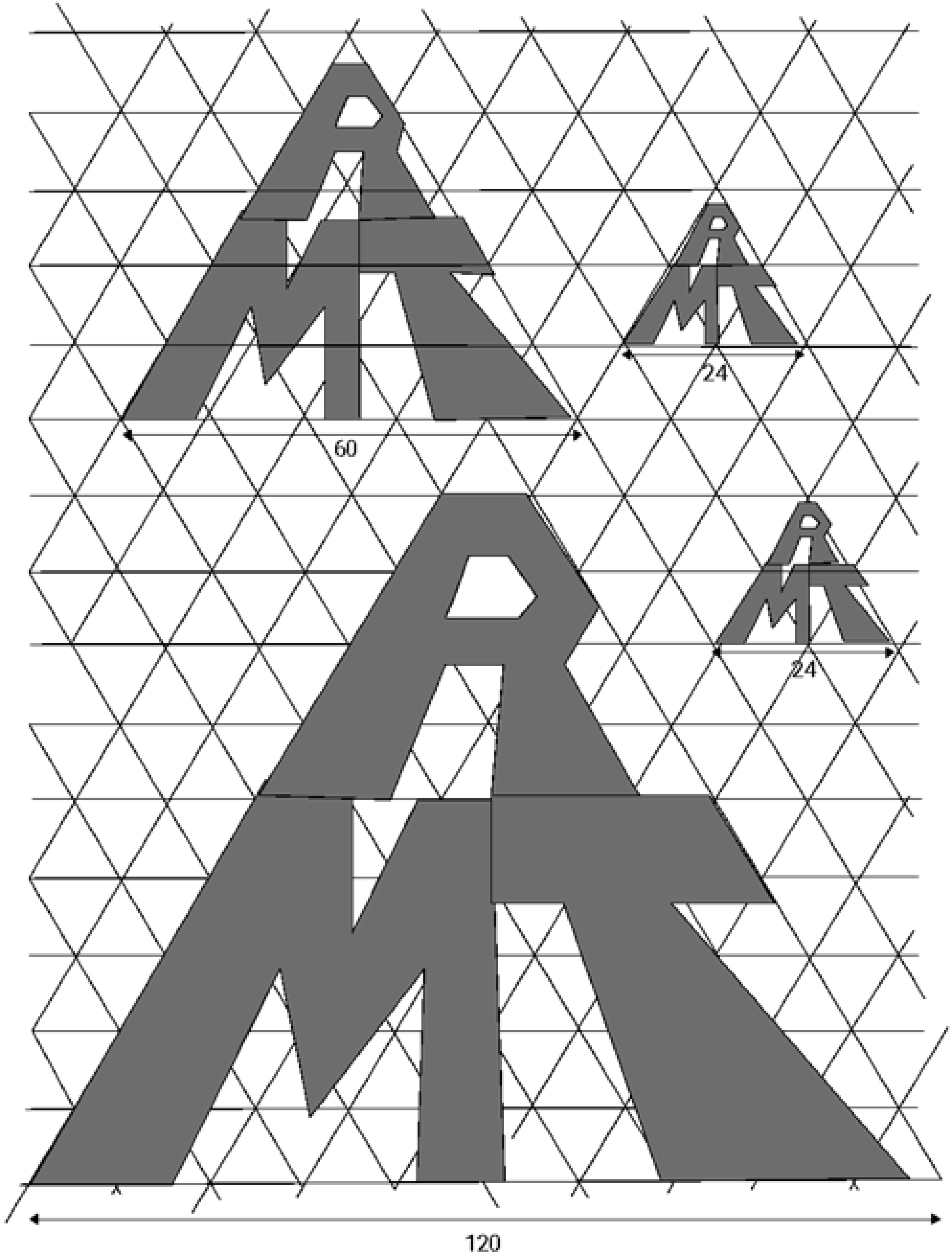
Erano state quindi elaborate due varianti del problema: LOGOS (A) e LOGOS (B)



LOGOS (A)

Una grande ditta internazionale ha creato un adesivo per la sua pubblicità.
Il modello « Mini » ha 24 cm di base.
Il modello “Maxi” ha 60 cm di base.

I due modelli sono stampati su uguali fogli di plastica colorata e lucida con riflessi metallizzati, poi tagliati con una pressa e consegnati in lotti da 10, 20 40, 50 o 100 modelli.
Un lotto da 100 modelli « Mini » pesa 450 g.
Quanto **pesa un lotto da 40 modelli “Maxi”?**
Spiegate la vostra soluzione.



LOGOS (B)

Dopo il successo dei suoi logo, la ditta ha deciso di aggiungere un modello « Gigante ».

Il modello “Mini” ha 24 cm di base.

Il “Maxi” ha 60 cm di base.

Il “Gigante” ha 120 cm di base.

Un lotto da 100 modelli « Mini » pesa sempre 450 g.

Quanto pesa un lotto da 40 modelli « Gigante »?

Spiegate la vostra soluzione.

Le due nuove versioni…

Entrambe le varianti del problema iniziale introducevano una rete a maglie triangolari, per sollecitare maggiormente l'attenzione degli allievi sulla trasformazione delle aree.

In particolare, la seconda variante proponeva il LOGO "*gigante*", di dimensioni 5 volte maggiori del modello "*mini*" per rendere ancora più evidente l'aumento delle aree, che diventano 25 volte maggiori.

Le maglie triangolari avrebbero potuto facilitare anche un conteggio approssimativo per le aree, e quindi evidenziare che le aree non possono avere il rapporto lineare esistente tra le altezze.

Anche le due nuove rappresentazioni però…

Nonostante la rilevanza delle rappresentazioni, elaborate al fine di evidenziare il più possibile attraverso le figure la relazione esistente tra altezze e aree, e quindi pesi, non si sono ottenuti risultati sensibilmente diversi, la relazione tra le aree attribuita da molti allievi è stata comunque di proporzionalità, rivelando l’inefficacia anche delle nuove rappresentazioni.

quindi

Ci sembra rilevante tenere in considerazione il seguente risultato, che la ricerca documenta:

Non sempre la rappresentazione proposta dal testo del problema fornisce un supporto all’elaborazione della strategia risolutiva.

Ci sono *misconcezioni* che non consentono facilmente nemmeno alle immagini di favorire il loro superamento….

Esempi di problemi in cui la rappresentazione gioca un ruolo essenziale

Qui di seguito un esempio in cui si rileva un utilizzo proficuo delle rappresentazioni

21° RMT PROVA II marzo - aprile 2013 ©ARMT 2032

16. LA BOTTIGLIA DELL'OLIO (Cat. 8, 9, 10)

Per celebrare i venti anni di attività della cooperativa che vende l'olio di Transalpino, è stato realizzato un numero limitato di bottiglie da un litro della forma particolare che vedete in figura.

Giovanni, che ha potuto acquistarne una, racconta ad uno dei suoi amici:

Si tratta di una bottiglia bellissima con la base piatta e circolare. Sfortunatamente non mi ricordo più quanto è alta, ma mi ricordo che:

- dopo aver consumato un quarto di litro di olio, ho osservato che il livello dell'olio era a 15 cm dalla base, nella zona cilindrica;

- dopo aver consumato mezzo litro di olio, ho capovolto la bottiglia ed ho constatato che il livello dell'olio era a 15 cm dal tappo.

Con queste informazioni determinate voi l'altezza della bottiglia.

Spiegate il vostro ragionamento

Il problema della bottiglia dell'olio

Il problema è stato proposto ad allievi del terzo anno anno della scuola secondaria di primo grado, e del biennio della scuola secondaria di secondo grado

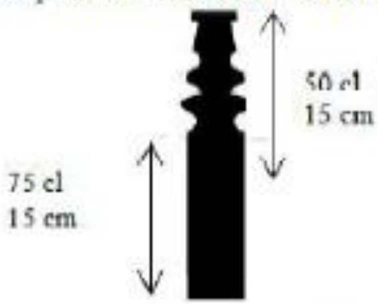
ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

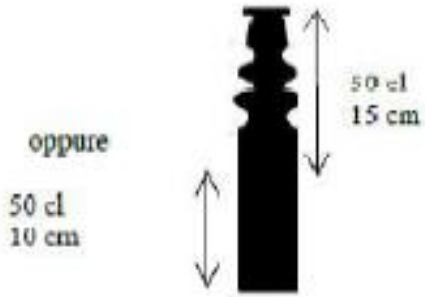
- Geometria dello spazio: volume. conservazione del volume di un liquido. qualunque sia la posizione del recipiente
- Aritmetica: proporzionalità

Analisi del compito

- Rendersi conto che il volume dell'olio nella parte cilindrica dipende solo dalla sua altezza.
- Dedurne, dopo la prima misura di Giovanni, che ¾ di litro (75 cl) occupano 15 cm di altezza nella parte cilindrica.
- Con un ragionamento di tipo proporzionale, si ottiene che nella parte cilindrica, in 1 cm di altezza, c'è un volume d'olio di 75/15 = 5 cl, o che 15 cm corrispondono a 3 quarti e 5 cm a 1 quarto.
- Dedurne che nella parte cilindrica, ½ litro di olio (50 cl) occupa un'altezza di 50 / 5 = 10 cm.
- Dalla seconda affermazione si sa che, a partire dal tappo, un'altezza di 15 cm contiene ½ litro di olio e di conseguenza quando si rigira la bottiglia con 0,5 litri, il livello dell'olio (di 15 cm a partire dal tappo) è nella parte cilindrica. Così i due livelli si sovrappongono nella parte cilindrica.
- Visualizzare questi dati con schemi come i seguenti:



oppure

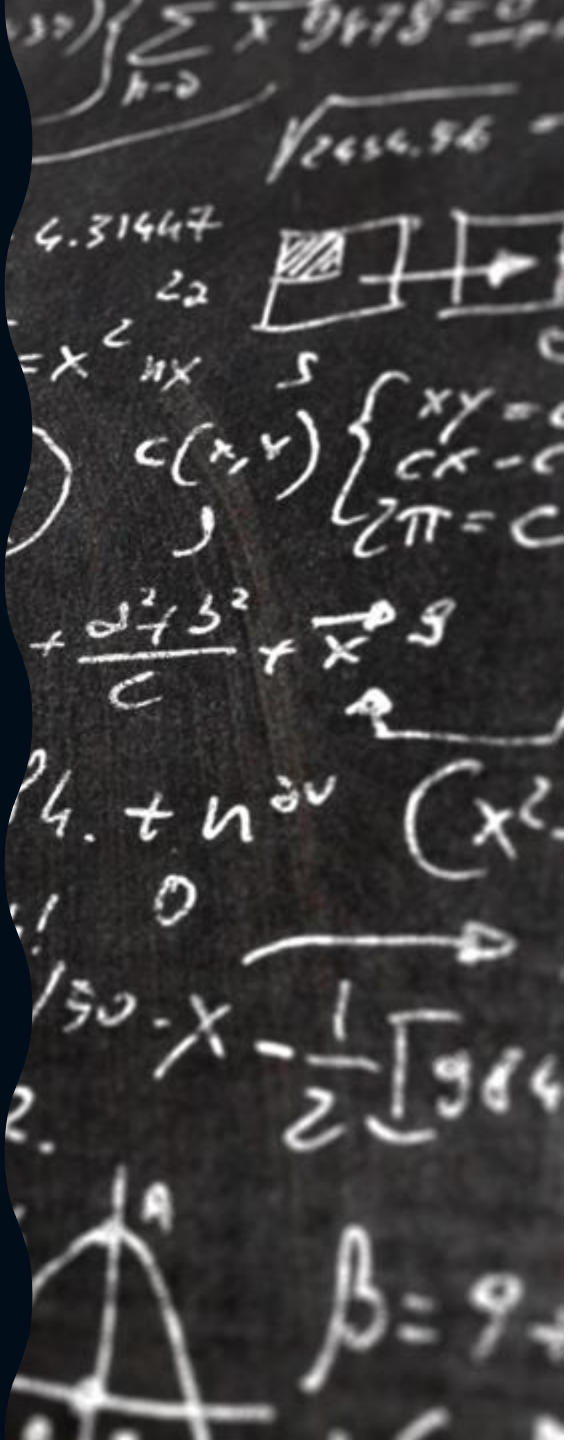


- Constatare sul primo schema che addizionando le due altezze di 15 cm, si conta due volte ¼ di litro di olio, corrispondente a 5 cm di altezza. Dedurne che la bottiglia ha un'altezza di 15 + 15 – 5 = 25 cm.

Oppure, constatare sul secondo schema che l'altezza della bottiglia è 10 + 15 = 25 cm.

Oppure: capire che la chiave del problema è che quando si capovolge la bottiglia, la metà dell'olio che resta si trova a 15 cm dall'alto e 10 cm dal basso (poiché i ¾ sono a 15 cm dal basso, 2/4 = ½, sono a 10 cm).

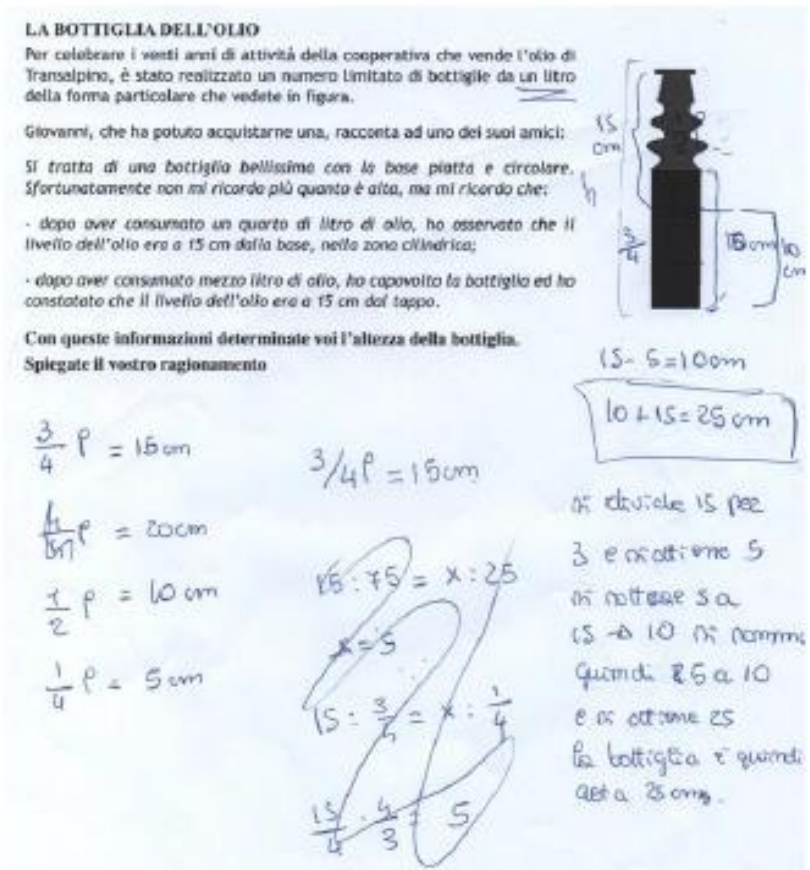
Il problema, nonostante non risulti particolarmente difficile, è inusuale, e richiede che l'allievo faccia una effettiva rappresentazione personale della situazione. Le strategie di risoluzione, come previsto anche dall'analisi a priori degli estensori del problema, riportate insieme al testo, prevedono essenzialmente un ragionamento con le frazioni (risoluzione più semplice e adatta alla scuola media), oppure ad uno di tipo proporzionale, o ancora di tipo algebrico, impostando una equazione. Sono interessanti sia l'evoluzione di queste prestazioni, man mano che cresce il livello scolare, sia le rappresentazioni che ragazzi forniscono, a volte approssimative, ma che chiariscono il ragionamento fatto. Inoltre, le argomentazioni sono qui molto intrecciate con il processo risolutivo, non si tratta di argomentazioni "narrative" che descrivono a posteriori i processi di pensiero, e per questo ci sembrano particolarmente interessanti.



La risoluzione e le rappresentazioni

In quasi tutti gli elaborati, ai vari livelli scolari, si è rilevata la presenza di rappresentazioni, sulle quali i ragazzi hanno prodotto frecce, schemi, correzioni, annotazioni,…

Spesso dopo un primo percorso risolutivo fatto essenzialmente di calcoli, si è innestata la produzione di un disegno che ha favorito il controllo sulla strategia che si era scelta, modificandola.



LA BOTTIGLIA DELL'OLIO

Per celebrare i venti anni di attività della cooperativa che vende l'olio di Transalpino, è stato realizzato un numero limitato di bottiglie da un litro della forma particolare che vedete in figura.

Giovanni, che ha potuto acquistarne una, racconta ad uno dei suoi amici:

Si tratta di una bottiglia bellissima con la base piatta e circolare. Sfortunatamente non mi ricordo più quanto è alta, ma mi ricordo che:

- dopo aver consumato un quarto di litro di olio, ho osservato che il livello dell'olio era a 15 cm dalla base, nella zona cilindrica;

- dopo aver consumato mezzo litro di olio, ho capovolto la bottiglia ed ho constatato che il livello dell'olio era a 15 cm dal tappo.

Con queste informazioni determinate voi l'altezza della bottiglia.
Spiegate il vostro ragionamento

$\frac{3}{4}\ell = 15cm$

$\frac{4}{4}\ell = 20cm$

$\frac{1}{2}\ell = 10cm$

$\frac{1}{4}\ell = 5cm$

$3/4\,\ell = 15cm$

$15 : 75 = x : 25$

$x = 5$

$15 : \frac{3}{4} = x : \frac{1}{4}$

$\frac{15}{4} \cdot \frac{4}{3} = 5$

15 cm h $\frac{3}{4}$ 15 cm 10 cm

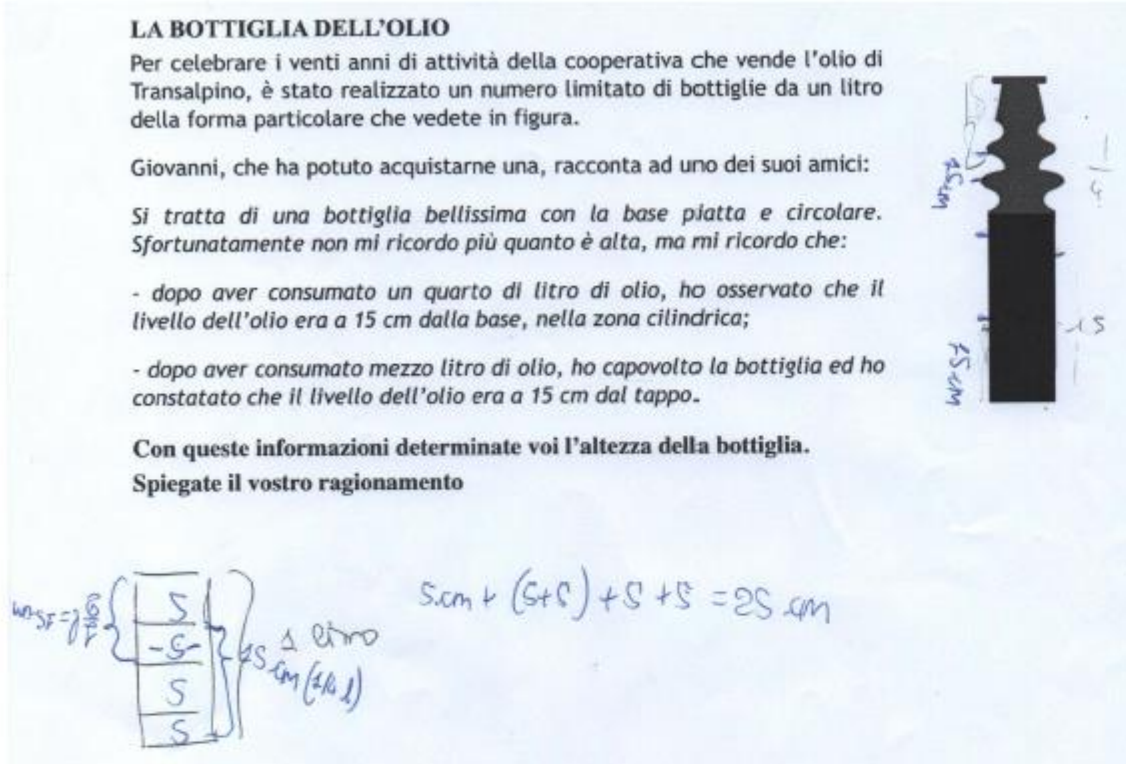
$15 - 5 = 10cm$

$\boxed{10 + 15 = 25cm}$

si divide 15 per 3 e si ottiene 5 si sottrae 5 a 15 → 10 si somma quindi 15 a 10 e si ottiene 25 la bottiglia è quindi alta 25 cm.

Risoluzione corretta in cui si osserva l'influenza del controllo sulla rappresentazione per rivedere una prima strategia esclusivamente di tipo proporzionale

Si può osservare (classe prima) come siano stati fatti dei tentativi di applicare il ragionamento proporzionale al contenuto della bottiglia, cosa che è però possibile solo in parte, in quanto la bottiglia non è tutta cilindrica. E' stato quindi necessario rivedere la situazione dopo i ¾ del contenuto della bottiglia.



LA BOTTIGLIA DELL'OLIO

Per celebrare i venti anni di attività della cooperativa che vende l'olio di Transalpino, è stato realizzato un numero limitato di bottiglie da un litro della forma particolare che vedete in figura.

Giovanni, che ha potuto acquistarne una, racconta ad uno dei suoi amici:

Si tratta di una bottiglia bellissima con la base piatta e circolare. Sfortunatamente non mi ricordo più quanto è alta, ma mi ricordo che:

- dopo aver consumato un quarto di litro di olio, ho osservato che il livello dell'olio era a 15 cm dalla base, nella zona cilindrica;

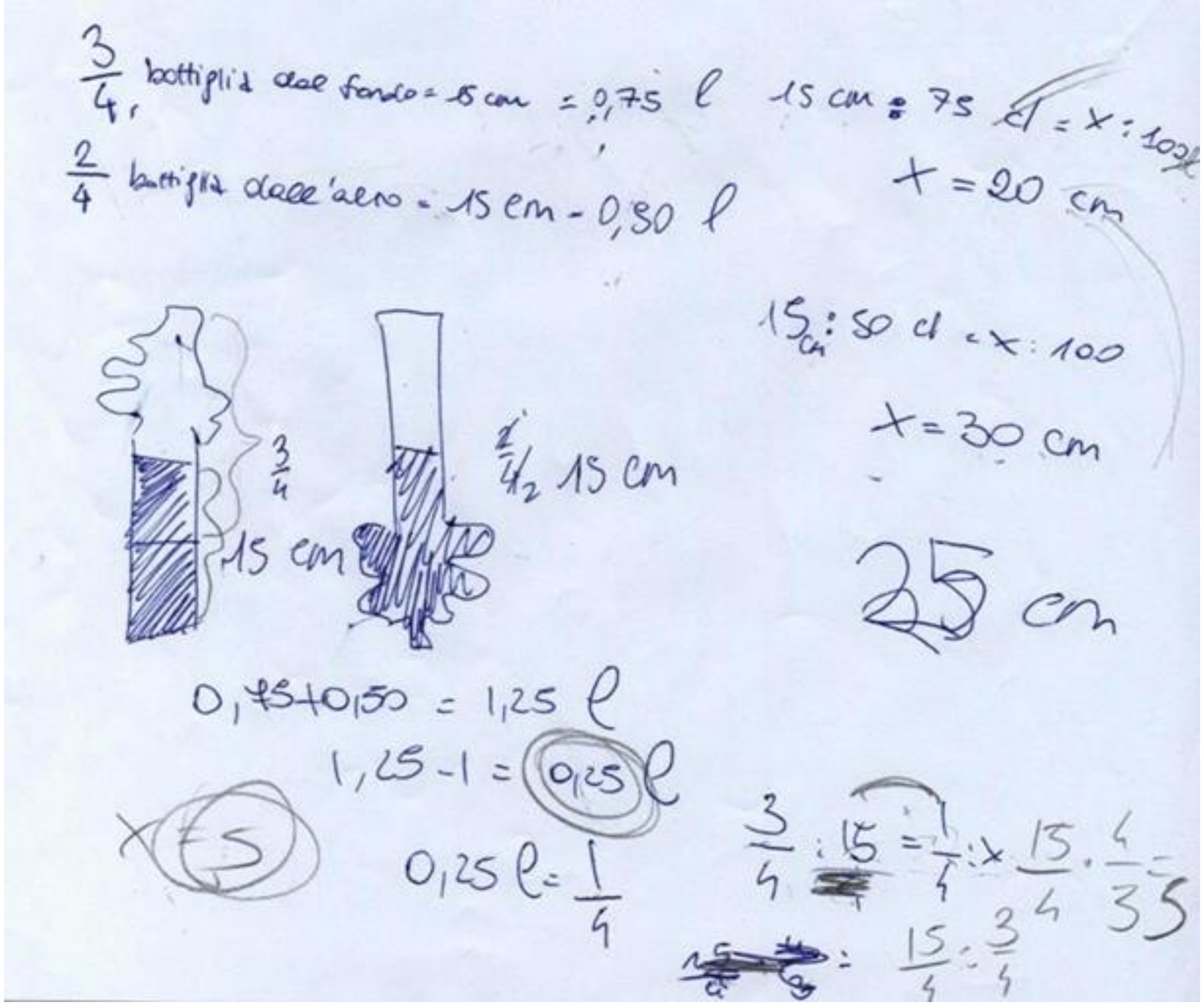
- dopo aver consumato mezzo litro di olio, ho capovolto la bottiglia ed ho constatato che il livello dell'olio era a 15 cm dal tappo.

Con queste informazioni determinate voi l'altezza della bottiglia.

Spiegate il vostro ragionamento

Siamo di fronte a rappresentazioni elaborate non per chi legge la risoluzione, ma solo per il soggetto che sta risolvendo il problema.
Si tratta di un passaggio a nostro giudizio importante, da un punto di vista didattico

Qui l'intuizione, suggerita dall'interazione con la figura, di una soluzione più agile e rapida, anche se non del tutto esplicitata, ma contenuta tutta nelle immagini e nei calcoli.



Questo protocollo mostra <u>i tentativi di applicare una procedura standard di tipo proporzionale</u>, cercando un supporto nella rappresentazione iconica. I tentativi comunque non arrivano alla risoluzione completa, e soprattutto la documentazione del ragionamento seguito non è stata prodotta per chi legge…

LA BOTTIGLIA DELL'OLIO

Per celebrare i venti anni di attività della cooperativa che vende l'olio di Transalpino, è stato realizzato un numero limitato di bottiglie da un litro della forma particolare che vedete in figura. 1L

Giovanni, che ha potuto acquistarne una, racconta ad uno dei suoi amici:

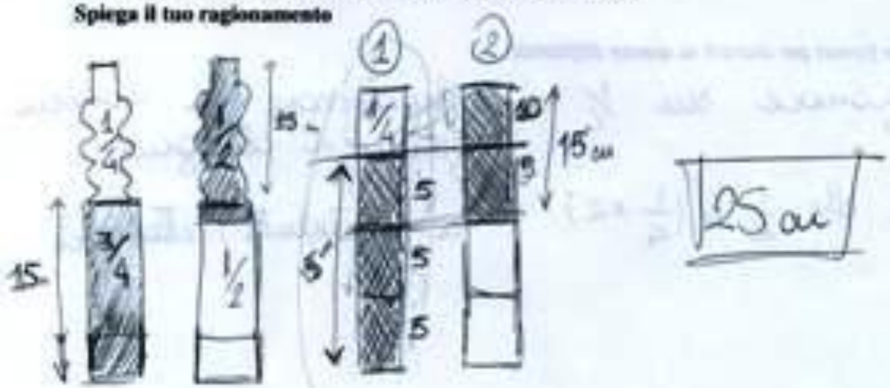
Si tratta di una bottiglia bellissima con la base piatta e circolare. Sfortunatamente non mi ricordo più quanto è alta, ma mi ricordo che:

- dopo aver consumato un quarto di litro di olio, ho osservato che il livello dell'olio era a 15 cm dalla base, nella zona cilindrica;

- dopo aver consumato mezzo litro di olio, ho capovolto la bottiglia ed ho constatato che il livello dell'olio era a 15 cm dal tappo.

Con queste informazioni determina l'altezza della bottiglia.

Spiega il tuo ragionamento



- Divido la bottiglia schematizzata in 4 parti uguali
$\frac{3}{4}$ sono occupate dall'olio per un'h di 15 cm (1)
↳ ogni quarto di bottiglia sarà $\frac{15}{3} = 5$ cm → DALLA BASE
- Nel (2) caso sappiamo che $\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{4} \times 2)$ occuperà 15 cm ↑ DA TAPPO
$\frac{1}{4}$ del $\frac{1}{2}$ occuperà 5 cm di altezza (perché sta nella parte cilindrica)
l'altro $\frac{1}{4}$ della parte deformata sarà $15 - 5 = 10$ cm
↳ $h_{TOT} = 15 + 10 = 25$ cm
($\frac{3}{4}$ cilindro) ($\frac{1}{4}$ deformata)

Qui appare evidente come sia efficace la rappresentazione della bottiglia, prima in piedi, poi capovolta. E' proprio mettendo a fuoco il confronto tra le due situazioni che si coglie la chiave della soluzione

Da questi esempi…

…e da altri, numerosi, che abbiamo raccolto, si nota che l’elaborazione di rappresentazioni spontanee, non codificate, prodotte dal soggetto che sta risolvendo il problema, possono risultare più proficue, ai fini del successo nella risoluzione, rispetto ad altre rappresentazioni, codificate, che costituiscono oggetto di insegnamento, quando queste non siano state sufficientemente rielaborate dagli studenti.

Ciò è confermato da alcune ricerche.

Rellensmann, Schukajlow, Blomberg, Leopold, 2022

Esiste anche una consistente documentazione …

riguardo allle rappresentazioni *indotte dall'insegnamento*, quindi insegnate e apprese, non spontanee, che molto spesso non portano al successo, in quanto evidentemente gli allievi non si sono ancora appropriati del loro utilizzo.

Ciò confermerebbe il *paradosso cognitivo* di Duval, che mette in luce la necessità di un reale apprendimento e di una consistente rielaborazione personale di rappresentazioni esterne *insegnate*

Un altro esempio: un problema “in verticale”

11. CHE GAMBE LUNGHE CHE HAI ... (I)(Cat. 6, 7, 8)

Il Lupo e Cappuccetto Rosso si incontrano nel bosco, si salutano ed entrambi si avviano verso la casa della nonna di Cappuccetto Rosso.

Il Lupo ride soddisfatto:

“*Ah! Ah! Ah! Ah! Mentre Cappuccetto Rosso fa due passi io faccio un salto lungo come tre dei suoi passi, arriverò sicuramente prima di lei!”*

Anche Cappuccetto Rosso sembra molto soddisfatta:

“*Questa volta il vecchio imbroglione non riuscirà ad arrivare prima di me, perché io conosco una scorciatoia.”*

Cappuccetto Rosso percorre la scorciatoia con 92 passi, invece il percorso del Lupo è lungo come 141 passi di Cappuccetto Rosso.

Chi arriverà per primo a casa della nonna, il Lupo o Cappuccetto Rosso?Con quanti passi di vantaggio?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

La versione per i più grandi:

18. CHE GAMBE LUNGHE CHE HAI ... (II) (Cat.9, 10)

Il Lupo e Cappuccetto Rosso si incontrano nel bosco, si salutano ed entrambi si avviano verso la casa della nonna di Cappuccetto Rosso.

Il Lupo ride soddisfatto:

"*Ah! Ah! Ah! Ah! Mentre Cappuccetto Rosso fa due passi, io faccio un salto lungo come 3 dei suoi passi, arriverò sicuramente prima di lei!*"

Anche Cappuccetto Rosso sembra molto soddisfatta:

"*Questa volta il vecchio imbroglione non riuscirà ad arrivare prima di me, perché io conosco una scorciatoia mentre il percorso scelto dal Lupo è molto più lungo.*"

È vero che il percorso scelto dal Lupo è più lungo, infatti misura tanto quanto la scorciatoia più i suoi due terzi.

Quando il primo arriverà a casa della nonna, quale frazione del suo sentiero resterà ancora da percorrere a chi arriverà per secondo?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Tentiamo un’analisi a posteriori dei risultati dei due problemi, certamente complessa:

Prima di tutto vale la pena individuare le **differenze** fondamentali e le **competenze di diverso livello** che i due problemi, analoghi, propongono.

Inoltre, poiché si tratta di un problema che evoca una **molteplicità di rappresentazioni**, sarà opportuno valutare anche in funzione di queste i risultati, sui due livelli.

Il confronto con l'analisi a priori

Compito matematico

Confrontare il tempo necessario per percorrere una distanza di 141 passi ad una velocità di tre passi per ogni unità di tempo, con il tempo necessario per percorrere una distanza di 92 passi a una velocità di due passi per ogni unità di tempo *(nella versione I*)

Confrontare il tempo necessario per percorrere una distanza misurata in passi ad una velocità di due passi per unità di tempo, con il tempo necessario per percorrere,a una velocità di tre passi per unità di tempo, una lunghezza corrispondente alla prima distanza aumentata dei suoi due terzi, poi calcolare la frazione del cammino rimasto per percorrere una di queste distanze quando l'altra è stata interamente percorsa. (*nella versione II)*

Le differenze tra i due livelli

Il compito matematico mette in luce come la formulazione per i più piccoli si soffermi su *quantità numeriche* di *passi* e *salti*, di cui si esplicita la relazione tra passi e unità di tempo.

Per gli allievi più grandi, compare un’esplicitazione più complessa di tale relazione che fa riferimento anche alle frazioni.

Le analisi a priori (versione I)

- Comprendere le informazioni date dal testo aiutandosi eventualmente con uno schema:
- \- la lunghezza di un salto è uguale a tre passi;
- \- Cappuccetto Rosso percorre una distanza di due passi mentre il Lupo fa un salto.

  Constatare che Cappuccetto Rosso percorre i 92 passi della scorciatoia mentre i salti che fa il Lupo nello stesso tempo corrispondono a 138 passi e che Cappuccetto Rosso arriva dunque per prima. Inoltre poiché il percorso del Lupo corrisponde a 141 passi, il Lupo avrà ancora tre passi (o un salto) da fare.

Versione (II)

Comprendere le informazioni date dal testo aiutandosi eventualmente con uno schema:

- la lunghezza di un salto è uguale a tre passi;
- Cappuccetto Rosso percorre una distanza di due passi mentre il Lupo fa un salto;
- la lunghezza del percorso intrapreso da Lupo è cinque terzi della scorciatoia.
- Effettuare alcuni tentativi assegnando dei valori alla lunghezza della scorciatoia:

oppure

fare un ragionamento di tipo deduttivo: accorgersi che su una stessa durata il lupo percorre mezzo passo in più rispetto a Cappuccetto Rosso e quindi avrà percorso una volta e mezzo la lunghezza della scorciatoia mentre Cappuccetto Rosso la percorre interamente. Dedurre che, siccome 2/3 è maggiore di 1/2, Cappuccetto Rosso arriverà per prima.

Oppure

ricorrere ad una equazione

……………………………….

Ma quali sono le reali difficoltà di questi problemi?

1. *Appropriazione* del problema (comprensione del testo, della situazione, del contenuto matematico
2. *Rappresentazione* corretta del percorso in termini di passi e salti, interpretando la corretta relazione tra questi.

E poi, c’è un elemento che rimane tacito…

“Confrontare il tempo necessario per percorrere una distanza di 141 passi ad una velocità di tre passi per ogni unità di tempo, con il tempo necessario per percorrere una distanza di 92 passi a una velocità di due passi per ogni unità di tempo il tempo impiegato” è la descrizione del compito matematico.

Il tempo e l’unità di tempo sono importanti nell’analisi del problema, perché si chiede “*chi arriva prima*”, tuttavia **il tempo** non viene nominato esplicitamente da nessuno degli allievi della secondaria di primo grado, nella risoluzione…

A proposito di rappresentazioni…

Nell’analisi a priori si immagina che i ragazzi possano costruire una tabella in cui si mettono a confronto :

unità di tempo, passi del Lupo e passi di Cappuccetto Rosso.

Si tratta di uno strumento senz’altro efficace nella risoluzione del problema…

Ma quanti ragazzi la utilizzano?

Il problema nella versione II

Le classi del biennio della scuola secondaria di secondo grado su cui abbiamo testato il problema sono complessivamente 51, più o meno equamente distribuite tra prime e seconde. Il campione è costituito da due licei classici, due licei scientifici, tre istituti tecnici o professionali.

L'analisi di questi elaborati ha evidenziato una certa ricchezza di elementi da studiare e analizzare rispetto alle rappresentazioni messe in atto dagli studenti.

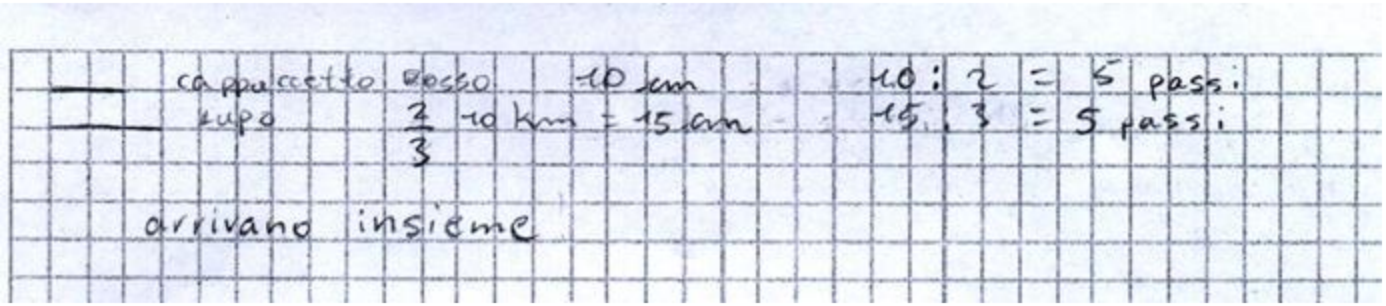
Quali le rappresentazioni possibili (o ipotizzabili)

- Tabelle di dati numerici da confrontare, ottenuti assegnando valori arbitrari alla lunghezza del percorso
- Rappresentazione grafica dei passi di Cappuccetto e dei salti del Lupo
- Simbolizzazione algebrica
- Rappresentazione frazionaria dei percorsi e della relazione tra ***passi*** (distanze nell'unità di tempo) e lunghezze dei percorsi

Cominciamo dalla rappresentazione grafica del percorso

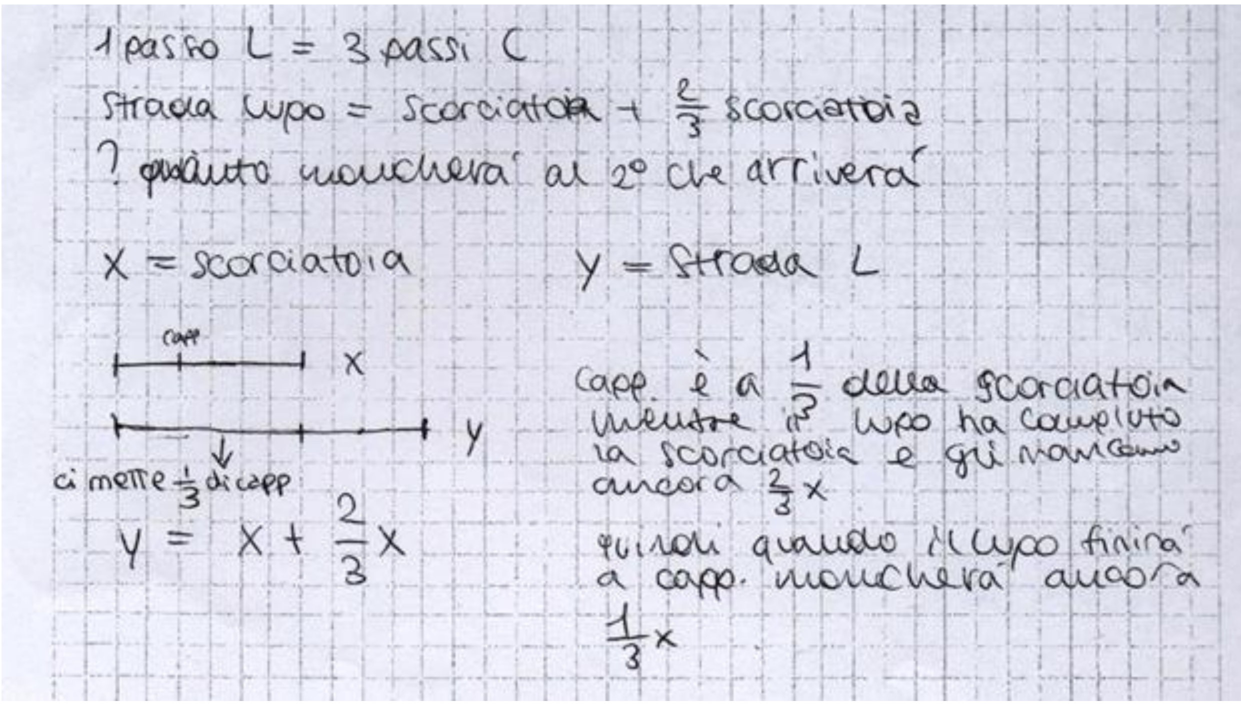
Sembrerebbe la più immediata e scontata, ma l’hanno utilizzata solo la metà degli studenti, con o senza successo. Gli elaborati mostrano la *difficoltà di elaborare un percorso risolutivo a partire da questa rappresentazione per passi, salti, percorsi*.

Questo problema mette in luce fortemente come non sia scontata una risoluzione con successo, a partire da una rappresentazione corretta



cappuccetto rosso 10 km — 10 : 2 = 5 passi;
lupo $\frac{2}{3}$ 10 km = 15 km — 15 : 3 = 5 passi;

arrivano insieme



1 passo L = 3 passi C

Strada lupo = scorciatoia + $\frac{2}{3}$ scorciatoia

? quanto mancherà al 2° che arriverà

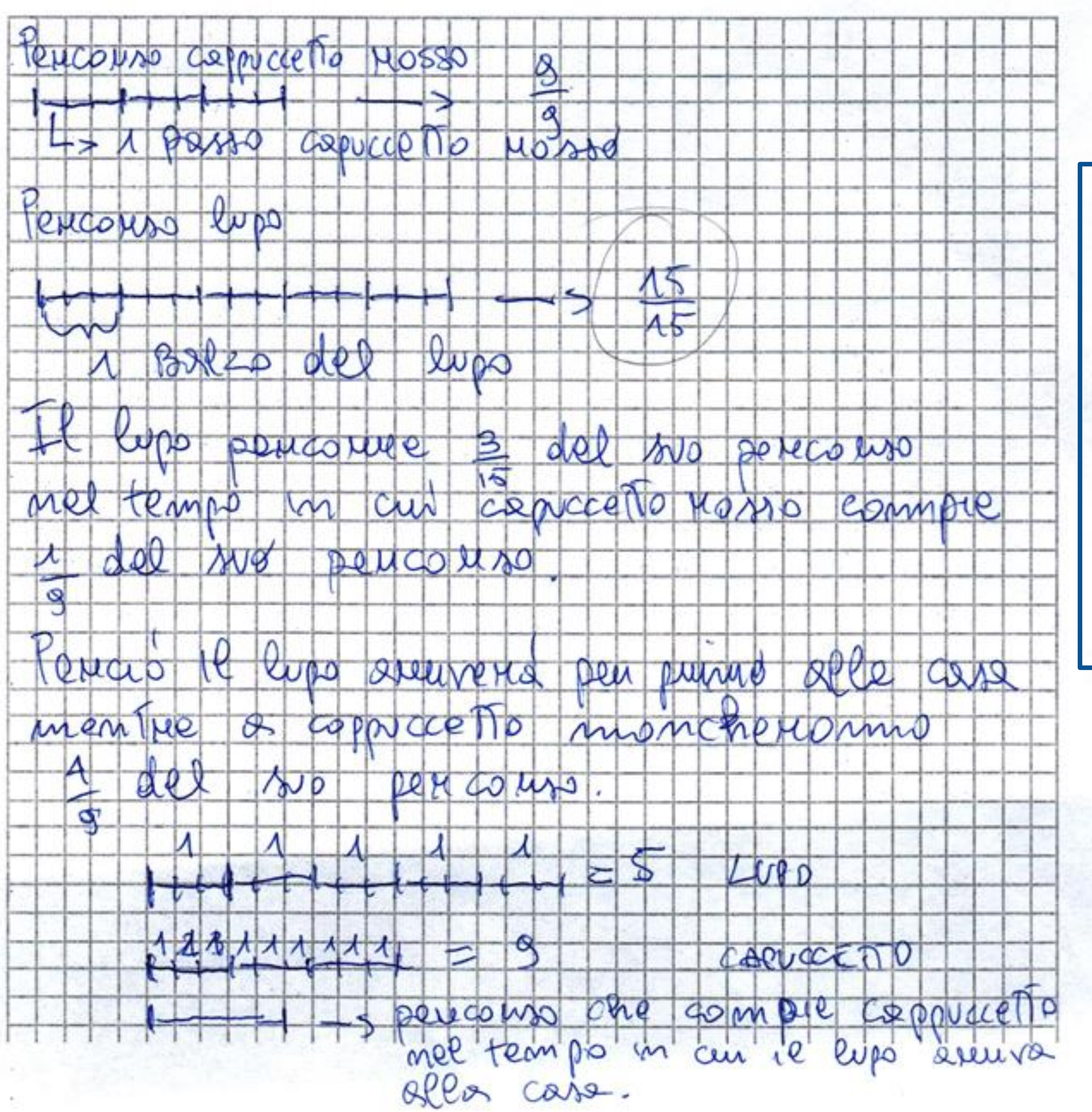
x = scorciatoia — y = strada L

$y = x + \frac{2}{3}x$

Capp. è a $\frac{1}{3}$ della scorciatoia mentre il lupo ha completo la scorciatoia e gli mancano ancora $\frac{2}{3}x$

quindi quando il lupo finirà a capp. mancherà ancora $\frac{1}{3}x$

In entrambi gli elaborati, a partire da una prima rappresentazione corretta, manca poi la rielaborazione successiva che mette in relazione i percorsi e i passi o salti



Percorso cappuccetto rosso $\frac{9}{9}$

1 passo capuccetto rosso

Percorso lupo $\frac{15}{15}$

1 balzo del lupo

Il lupo percorre $\frac{3}{15}$ del suo percorso nel tempo in cui cappuccetto rosso compie $\frac{1}{9}$ del suo percorso.

Perciò il lupo arriverà per primo alla casa mentre a cappuccetto mancheranno $\frac{4}{9}$ del suo percorso.

1 1 1 1 1 = 5 LUPO

1 2 3 1 1 1 1 1 1 = 9 CAPUCCETTO

percorso che compie cappuccetto nel tempo in cui il lupo arriva alla casa.

In questo caso una corretta rappresentazione grafica non viene poi formalizzata correttamente con l’utilizzo delle frazioni

Abbiamo provato a risolvere per tentativi

percorso cappuccetto $= \frac{3}{3}$

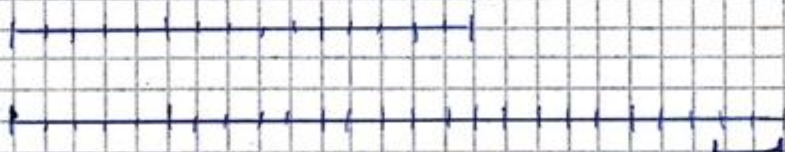
percorso lupo $= \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$$\frac{3}{3} : \frac{5}{3} = x : \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\frac{\cancel{3}}{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{2}{5}$$

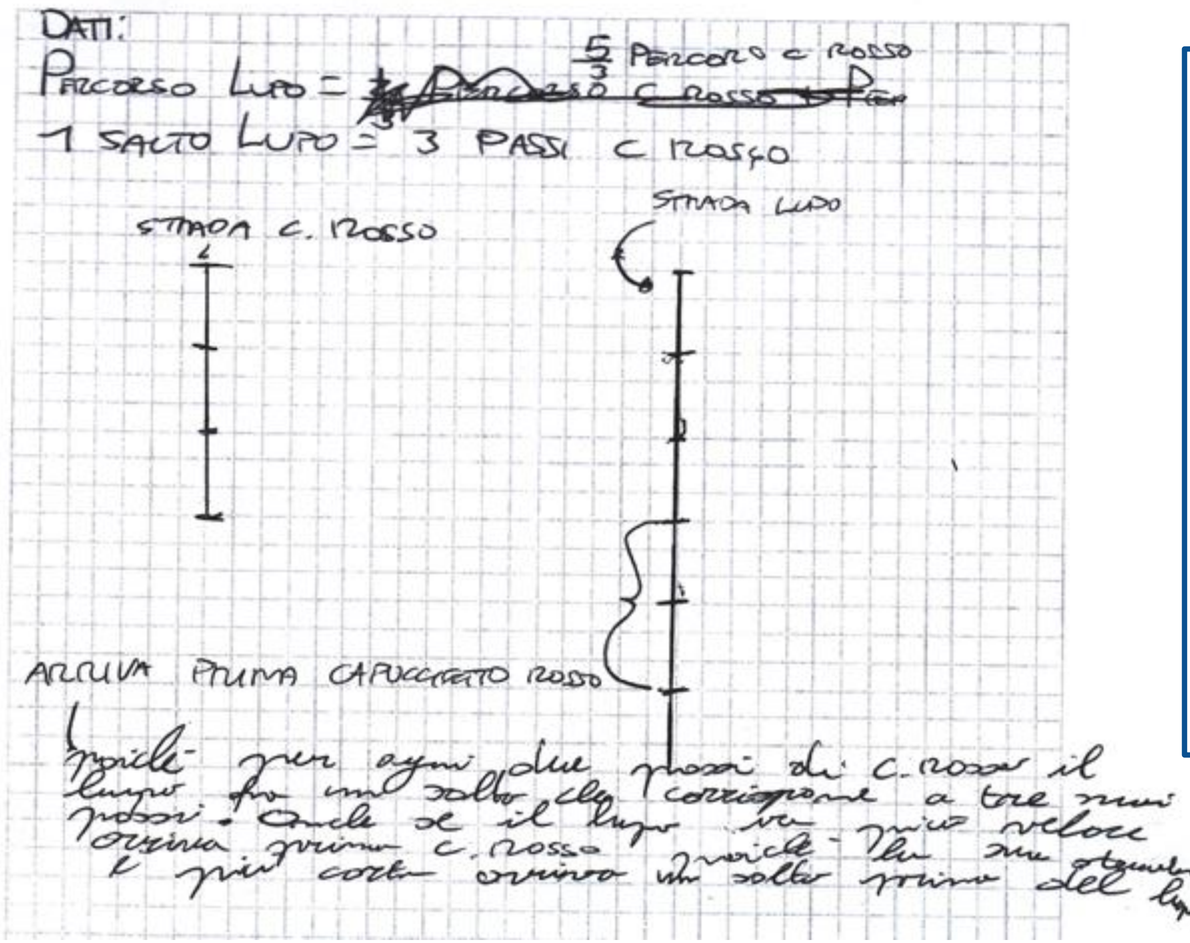
Disegnando i percorsi e dividendo una unità in 5 segmenti congruenti, i passi che il lupo deve ancora fare sono 2 su 5 passi dell'unità.

Cappuccetto

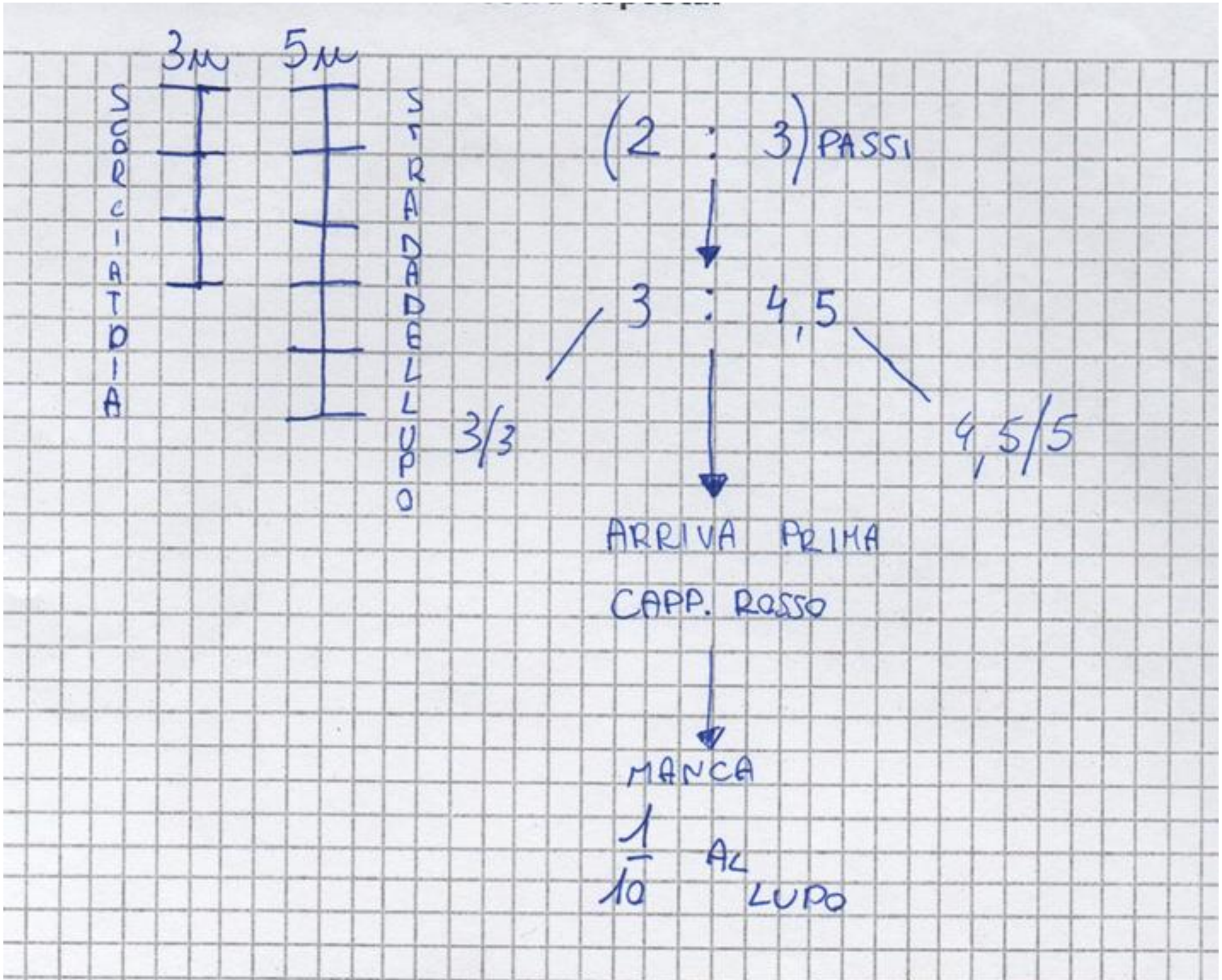


Anche in questo caso si osserva la difficoltà nel rielaborare la rappresentazione grafica ai fini della risoluzione

Esempi di successo con o senza la rappresentazione grafica

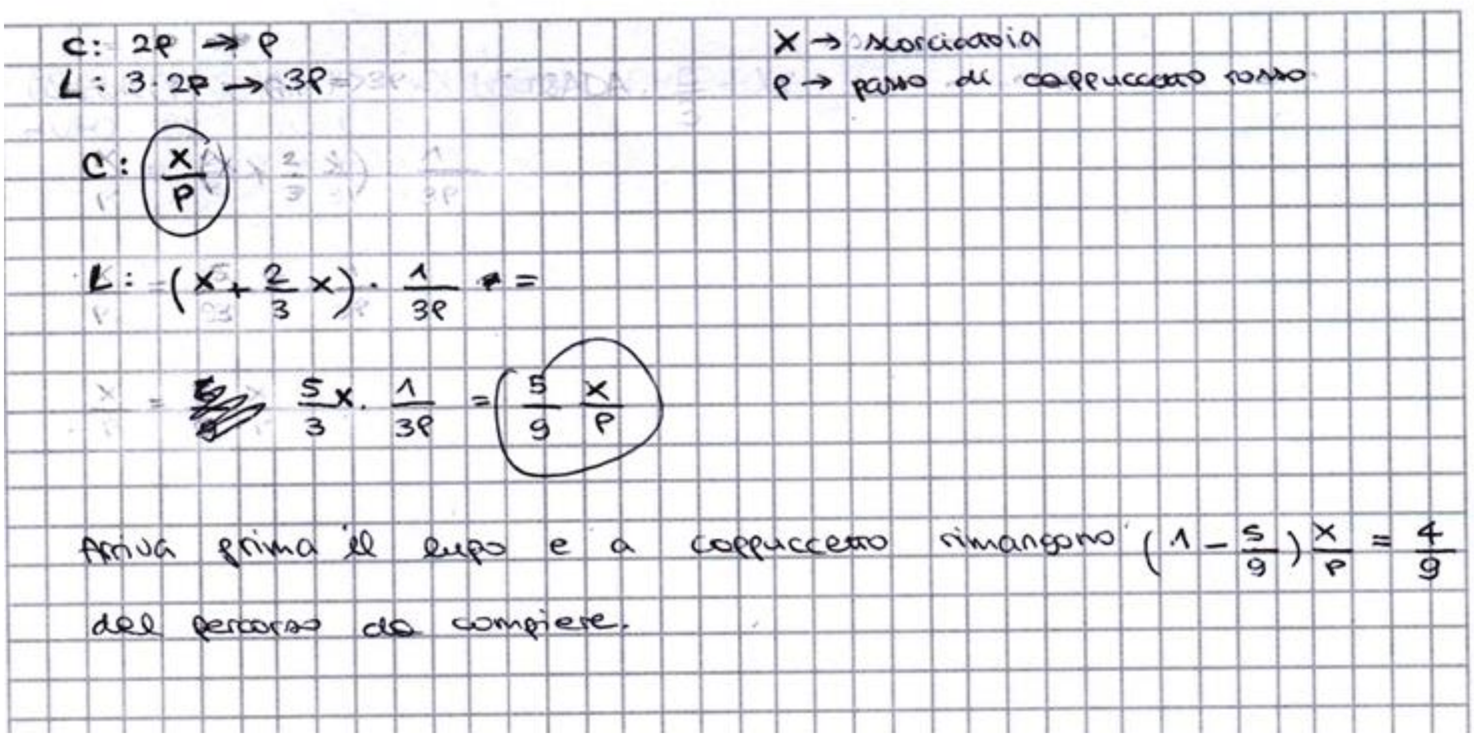


In questo caso, anche se l'interpretazione non è ben spiegata, la rappresentazione grafica illustra efficacemente la risposta corretta fornita



Una modalità originale di rappresentare la soluzione

Ma le rappresentazioni grafiche ci sono state più o meno nella metà del totale.
Molte soluzioni puntano sulla simbolizzazione algebrica



C: $2p \rightarrow p$

L: $3 \cdot 2p \rightarrow 3p$

$x \rightarrow$ scorciatoia

$p \rightarrow$ passo di cappuccetto rosso

C: $\frac{x}{p}$

L: $\left(x + \frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{1}{3p} =$

$= \frac{5}{3}x \cdot \frac{1}{3p} = \frac{5}{9}\,\frac{x}{p}$

Arriva prima il lupo e a cappuccetto rimangono $\left(1 - \frac{5}{9}\right)\frac{x}{p} = \frac{4}{9}$ del percorso da compiere.

Prevale la simbolizzazione algebrica della relazione tra i due percorsi

Dati:

"x": scorciatoia di Cappuccetto Rosso $\longrightarrow$ $x+\frac{2}{3}x$: percorso Lupo

Risolvo:

$$\frac{x+\frac{2}{3}x}{(2+1)} = \left(x+\frac{2}{3}x\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x = \frac{3x+2x}{9} = \frac{5}{9}x$$

n° di volte che il lupo compie tre pani

$\frac{x}{2}$ n° di volte che Cappuccetto Rosso compie 2 pani

CONFRONTO:

$$\frac{x}{2} = \frac{9}{18}x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{9}{18}x < \frac{10}{18}x$$

$$\frac{5}{9}x = \frac{10}{18}x$$

cioè il lupo ci impiega di più (arriva secondo)

$\longrightarrow \left(\frac{10}{18}-\frac{9}{18}\right)x = \frac{1}{18}x$ percorso che gli rimane da compiere

Una buona argomentazione

(C.R.)

Ogni volta che Cappuccetto Rosso fa due passi, il lupo ne fa 3

Il percorso del lupo è $\frac{5}{3}$ del percorso di Cappuccetto Rosso.

Ipotizziamo che il percorso di Cappuccetto Rosso sia 36 m, di conseguenza quello del lupo è $\frac{5}{3} \cdot 36 = 60\,m$

Ipotizziamo che C.R. faccia un passo di 1 m

$x = \frac{36}{2} = 18$ per C.R $\qquad$ $x = \frac{60}{3} = 20$ per il lupo

numero di volte in cui ha fatto un passo per completare il percorso $\Rightarrow$ C.R. arriva prima.

Quando lei arriva, dopo 18 volte che ha fatto un passo il lupo ha fatto $18 \cdot 3\,m = 54\,m$, quindi mancano

$6\,m \rightarrow \frac{1}{10}$ del percorso

E per la versione I ?

Osservazioni complessive:

I ragazzi hanno difficoltà a considerare contemporaneamente più vincoli:

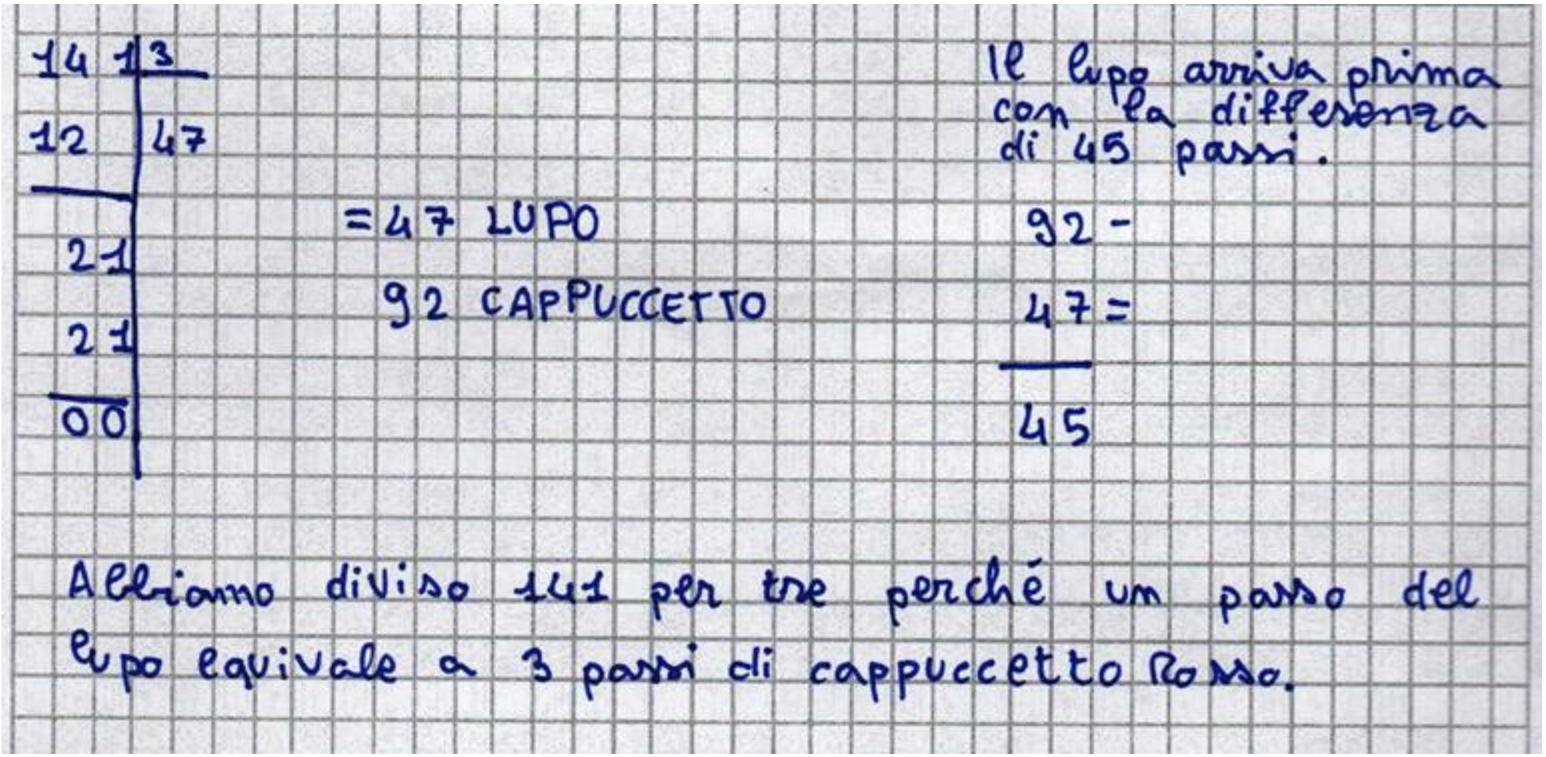
- percorsi differenti
- passi differenti
- velocità diverse dei due

Qui non si tiene conto dei due percorsi, ma solo dei passi diversi

LA NOSTRA RISPOSTA:

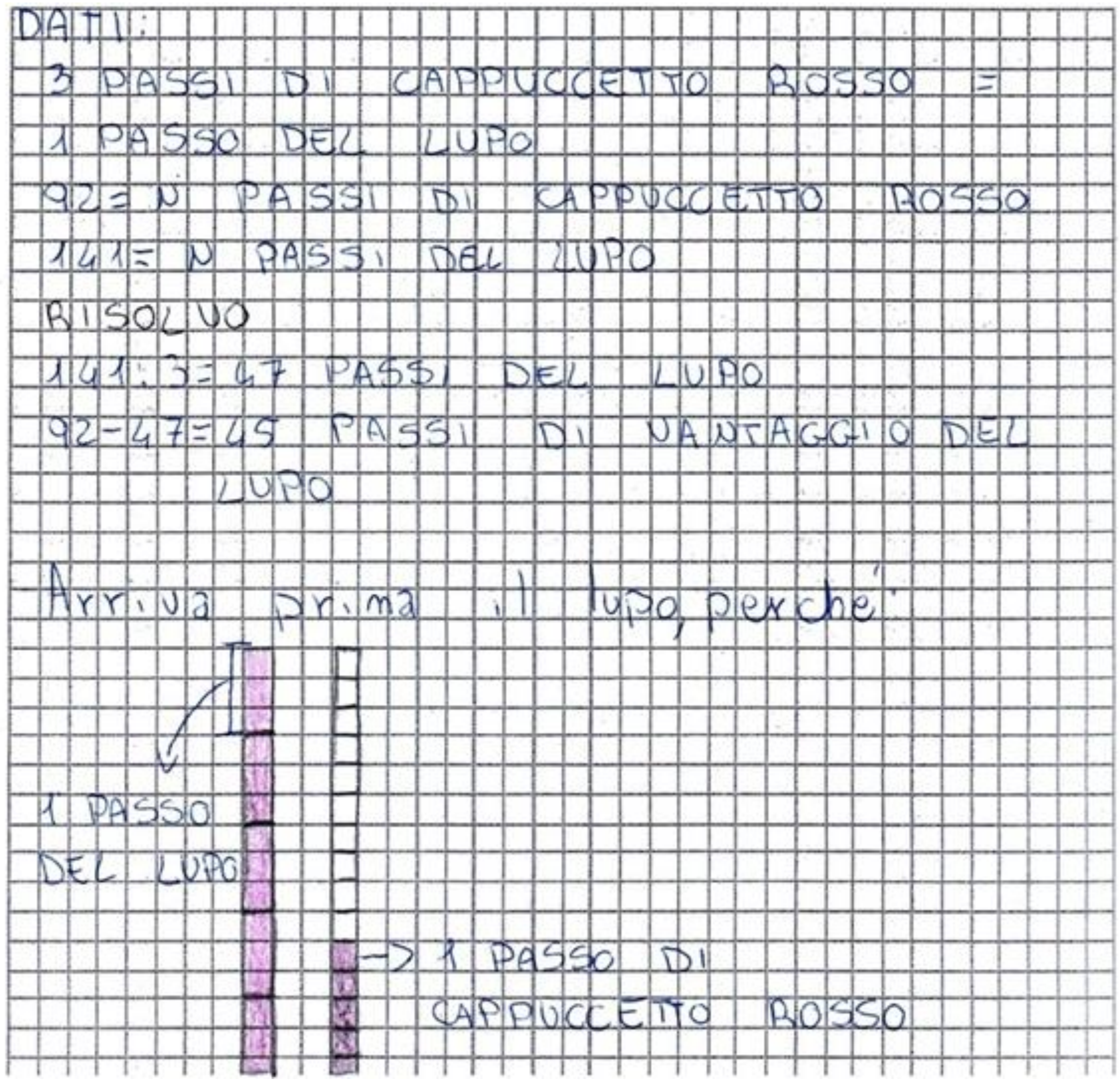
Il primo ad arrivare a casa della nonna è il Lupo, con 45 passi di vantaggio. Abbiamo ragionato nel seguente modo: abbiamo diviso 141 (i passi che farebbe il Lupo se avesse gli stessi passi di Cappuccetto Rosso) per 3 (i passi del Lupo corrispondenti a quelli ~~del Lupo~~ di Cappuccetto) e ci è risultato 47, ovvero i passi che ci impiega il Lupo ad arrivare ~~a~~ a casa della Nonna. Dopodiche abbiamo sottratto a 92 il numero 47, così abbiamo scoperto che 45 sono i passi di vantaggio del Lupo.

Una procedura aritmetica, priva di rappresentazioni, che ancora una volta non prende in considerazione la scorciatoia



è forse indizio di un'abitudine a vedere il problema come una sequenza di operazioni aritmetiche, con un testo troppo lungo per essere letto con attenzione?

Una rappresentazione efficace che però non porta al successo

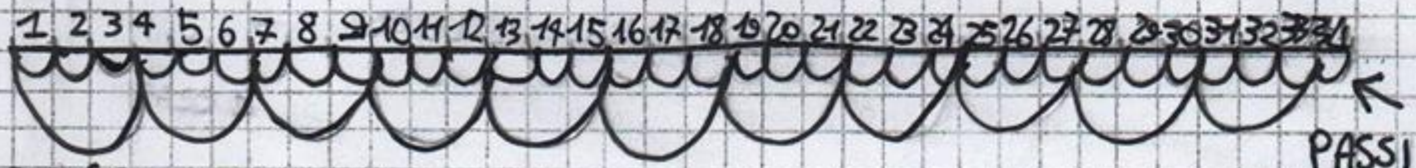


|—| = 1 PASSO

|——| = 2 PASSI DI CAPPUCCETTO ROSSO

|———| = 1 PASSO DEL LUPO

SU UNA RETTA ABBIAMO RAPPRESENTATO IN PARTE IL TRAGITTO DEI DUE SOGGETTI



PASSI DEL LUPO

PASSI DI CAPPUCCETTO ROSSO

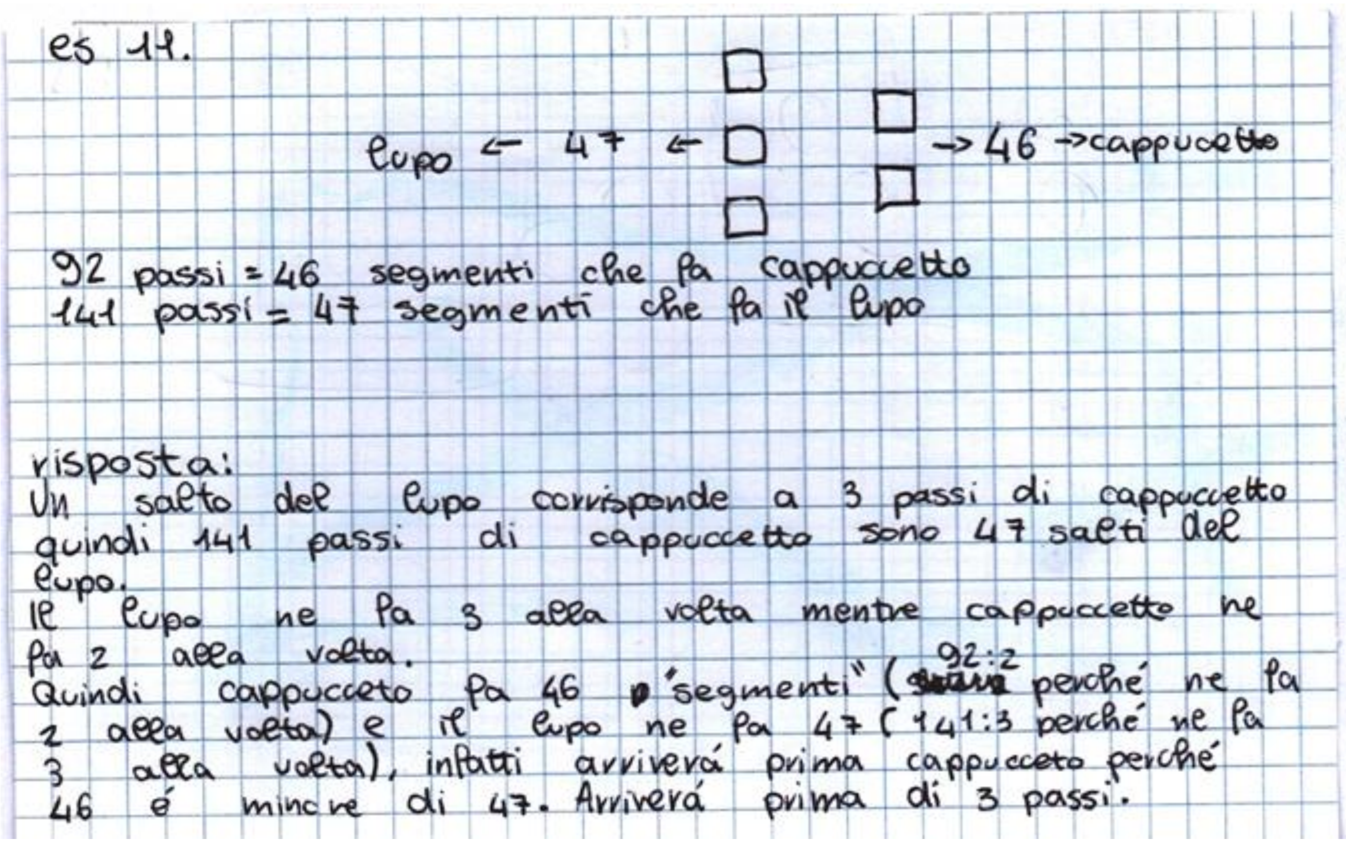
DI CONSEGUENZA ABBIAMO CALCOLATO

141:3=47 E 92:2=46

CAPPUCCETTO ROSSO ARRIVERÀ PRIMA DEL LUPO CON 1 PASSO DI VANTAGGIO.

Una buona rappresentazione che porta al successo

Un’altra rappresentazione originale



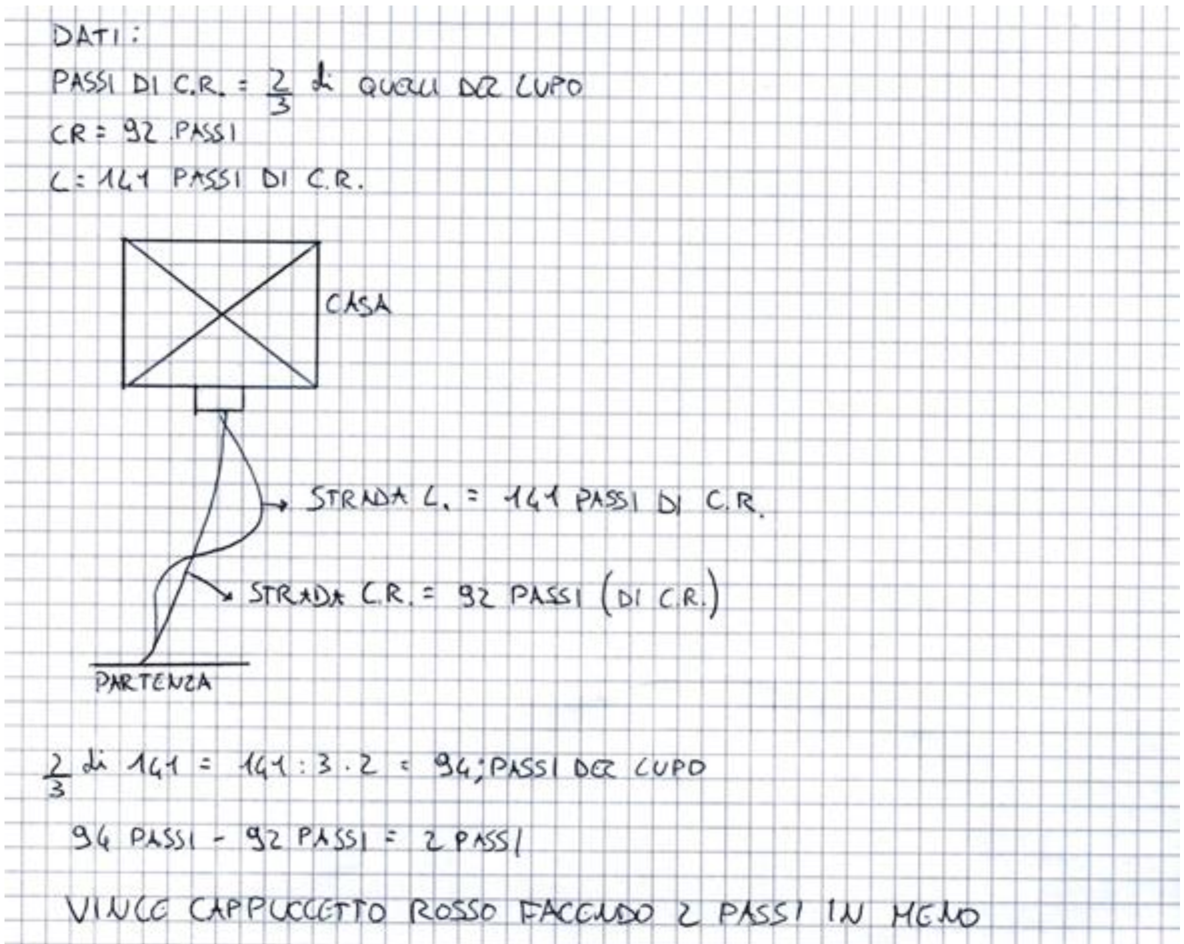
es 11.

lupo ← 47 ← □ □ → 46 → cappuccetto

92 passi = 46 segmenti che fa cappuccetto
141 passi = 47 segmenti che fa il lupo

risposta:
Un salto del lupo corrisponde a 3 passi di cappuccetto quindi 141 passi di cappuccetto sono 47 salti del lupo.
Il lupo ne fa 3 alla volta mentre cappuccetto ne fa 2 alla volta.
Quindi cappucceto fa 46 "segmenti" (92:2 perché ne fa 2 alla volta) e il lupo ne fa 47 (141:3 perché ne fa 3 alla volta), infatti arriverá prima cappucceto perché 46 é minore di 47. Arriverá prima di 3 passi.

Un po' fantasiose le rappresentazioni della scorciatoia, quando questa colpisce


DATI:

PASSI DI C.R. = $\frac{2}{3}$ di QUELLI DEL LUPO

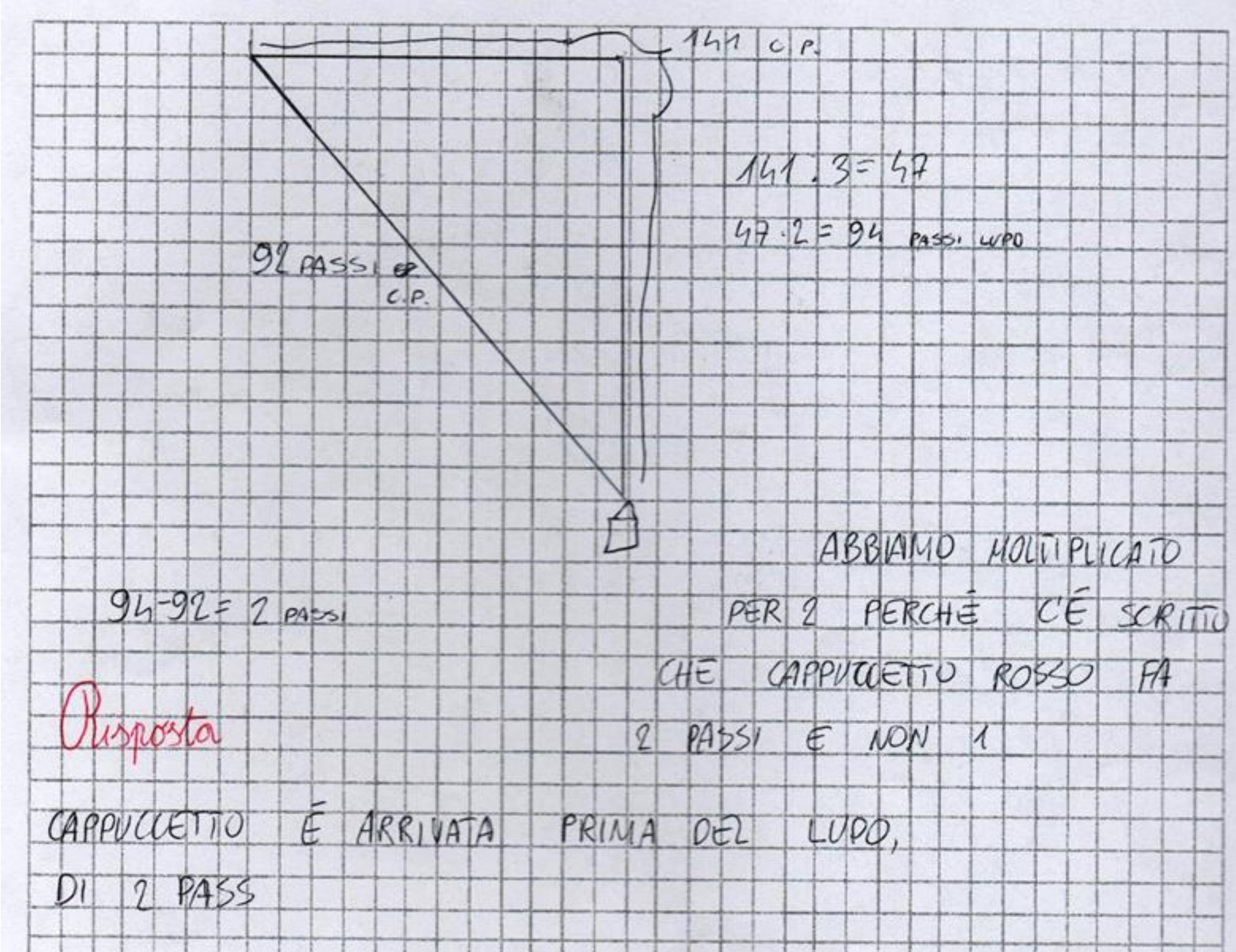
CR = 92 PASSI

L = 141 PASSI DI C.R.

$\frac{2}{3}$ di 141 = 141 : 3 · 2 = 94; PASSI DEL LUPO

94 PASSI − 92 PASSI = 2 PASSI

VINCE CAPPUCCETTO ROSSO FACENDO 2 PASSI IN MENO



141 C.P.

92 PASSI C.P.

141 : 3 = 47

47 · 2 = 94 PASSI LUPO

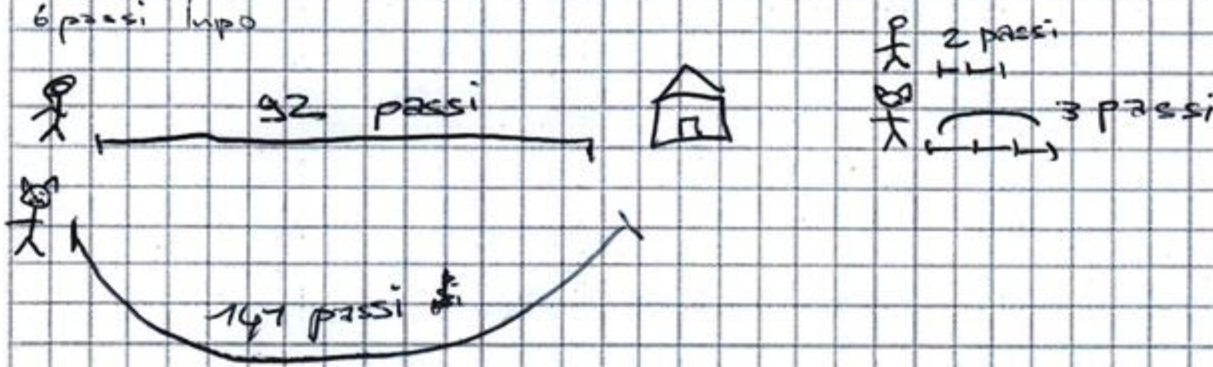
ABBIAMO MOLTIPLICATO PER 2 PERCHÉ C'É SCRITTO CHE CAPPUCCETTO ROSSO FA 2 PASSI E NON 1

94 − 92 = 2 PASSI

Risposta

CAPPUCCETTO É ARRIVATA PRIMA DEL LUPO, DI 2 PASS

Traiettoria fantasiosamente "pitagorica"



Dati

3 passi di Cappuctto = 1 salto del lupo

92 → numero di passi di Cappuccetto per percorrere il percorso.

141 → passi di Cappuccetto per percorrere il percorso del lupo

? Passi di vantaggio

141 : 3 = 47 → passi del lupo

92 - 47 = 45 → passi di vantaggio

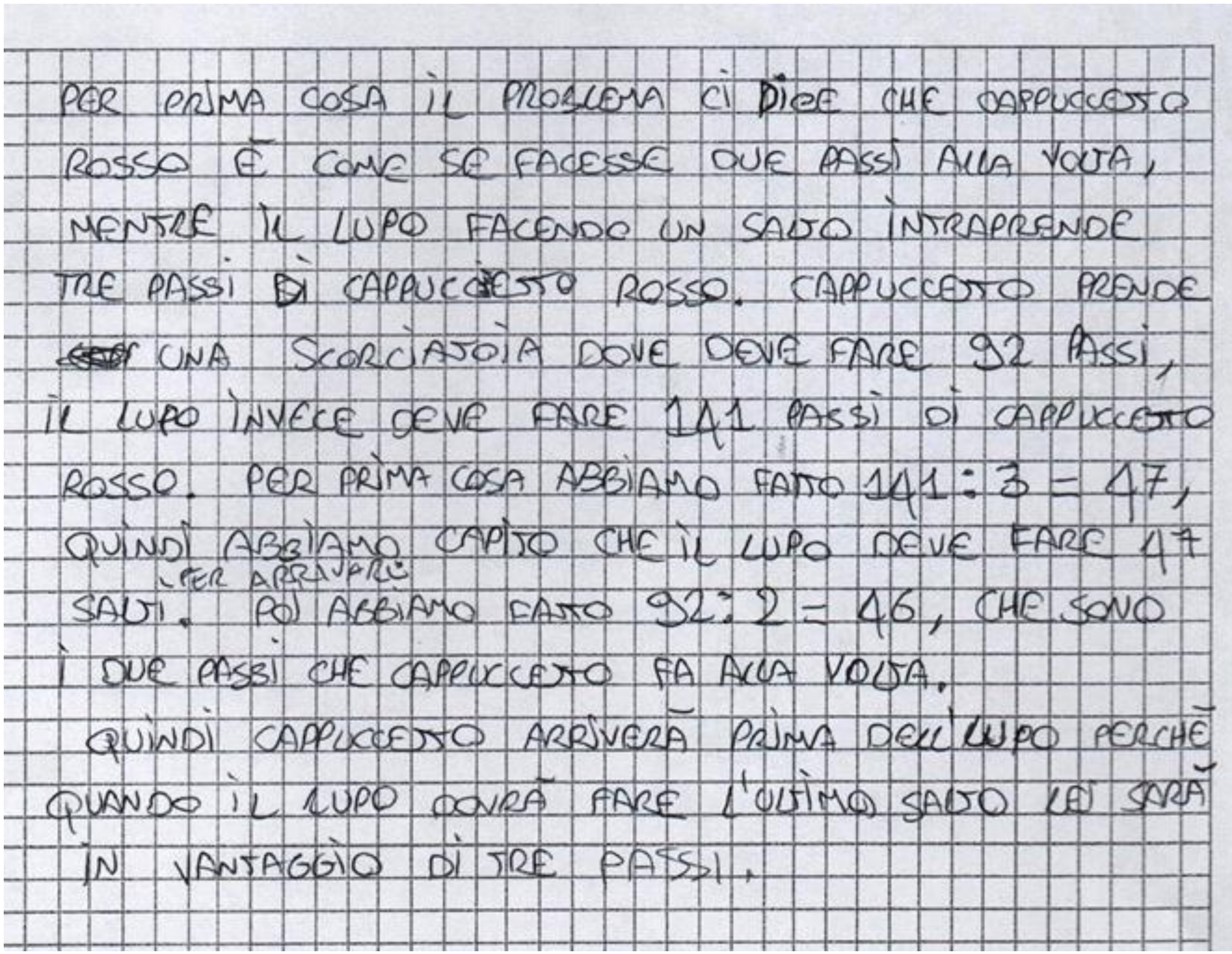
Per trovare ~~il percorso~~ chi arriverà per primo alla casa della nonna, abbiamo capito che mentre Cappuccetto fa 3 passi, il lupo fa 1 salto.

Quindi abbiamo fatto il numero di passi che impiegava Cappuccetto per fare il percorso del lupo (141), diviso 3, ovvero i passi di Cappuccetto ogni salto del lupo. 141 : 3 = 47

Il lupo arriverá prima di Cappuccetto alla casa della nonna con 45 passi di vantaggio.

92 - 47 = 45

Errore più frequente: si considerano i due diversi percorsi ma non si tiene conto dei passi diversi. E' evidente che manca una immagine mentale delle differenze tra i due tipi di "passo"



PER PRIMA COSA IL PROBLEMA CI DICE CHE CAPPUCCETTO
ROSSO È COME SE FACESSE DUE PASSI ALLA VOLTA,
MENTRE IL LUPO FACENDO UN SALTO INTRAPRENDE
TRE PASSI DI CAPPUCCETTO ROSSO. CAPPUCCETTO PRENDE
UNA SCORCIATOIA DOVE DEVE FARE 92 PASSI,
IL LUPO INVECE DEVE FARE 141 PASSI DI CAPPUCCETTO
ROSSO. PER PRIMA COSA ABBIAMO FATTO 141 : 3 = 47,
QUINDI ABBIAMO CAPITO CHE IL LUPO DEVE FARE 47
PER ARRIVARE
SALTI. POI ABBIAMO FATTO 92 : 2 = 46, CHE SONO
I DUE PASSI CHE CAPPUCCETTO FA ALLA VOLTA.
QUINDI CAPPUCCETTO ARRIVERÀ PRIMA DELL LUPO PERCHÉ
QUANDO IL LUPO DOVRÀ FARE L'ULTIMO SALTO LEI SARÀ
IN VANTAGGIO DI TRE PASSI.

Un esempio di argomentazione solo verbale, in cui la rappresentazioni alternative non compaiono. Spiegazione faticosa, ma apprezzabile

Tentiamo delle prime conclusioni

- Certamente l'utilizzo di rappresentazioni esterne
  - in problemi che le evochino, anche senza presentarle esplicitamente
  - *può influenzare positivamente* il successo nella risoluzione.
- Questo avviene non soltanto in contesti geometrici, ma in generale in ogni contesto.
- Sembrano essere efficaci quelle rappresentazioni elaborate in maniera personale dal soggetto, più che quelle "apprese" scolasticamente. **In questo caso è necessario che tali rappresentazioni, divenute oggetto di insegnamento, siano state a loro volta rielaborate e acquisite in termini di competenza, cosa che non sempre avviene, o non sempre avviene nei tempi previsti.**

Quali problemi…?

E’ nostra convinzione, supportata anche da recenti ricerche, *che i problemi di modellizzazione di situazioni e fenomeni reali siano particolarmente adatti a sollecitare la risoluzione attraverso rappresentazioni e disegni*.

In particolare, il **disegno matematico,** quindi quello che mette in ombra dettagli delle figure reali, ma che ne evidenzia le caratteristiche matematiche, è positivamente correlato con il successo.

I problemi di modellizzazione

I **problemi di modellizzazione** possono essere definiti come

- problemi verbali **non standard**
- caratterizzati dall’avere, tra l'altro, **vaghe** condizioni iniziali,
- e dalla possibilità di fare assunzioni **realistiche**,
- di costruire **diversi modelli** matematici,
- applicando differenti **metodi** di soluzione
- e ottenendo **risultati diversi**

(Maas, 2010; Vershaffel el al., 2020)

Modellizzare

Nella ricerca di modelli, la maggior parte degli approcci che descrivono il processo cognitivo associato alla risoluzione di un problema di modellizzazione (Blum &Leiss, 2007; Borromeo Ferri, 2006; Galbraith e Stillman, 2006; Verschaffel et al., 2000) concordano rispetto alla sequenza:

- in primo luogo, lo studente deve leggere il problema e comprendere la situazione problematica;
- in secondo luogo, lo studente deve strutturare il proprio modello della situazione organizzando gli oggetti rilevanti e riducendoli al loro aspetti più importanti.

Il processo di modellizzazione

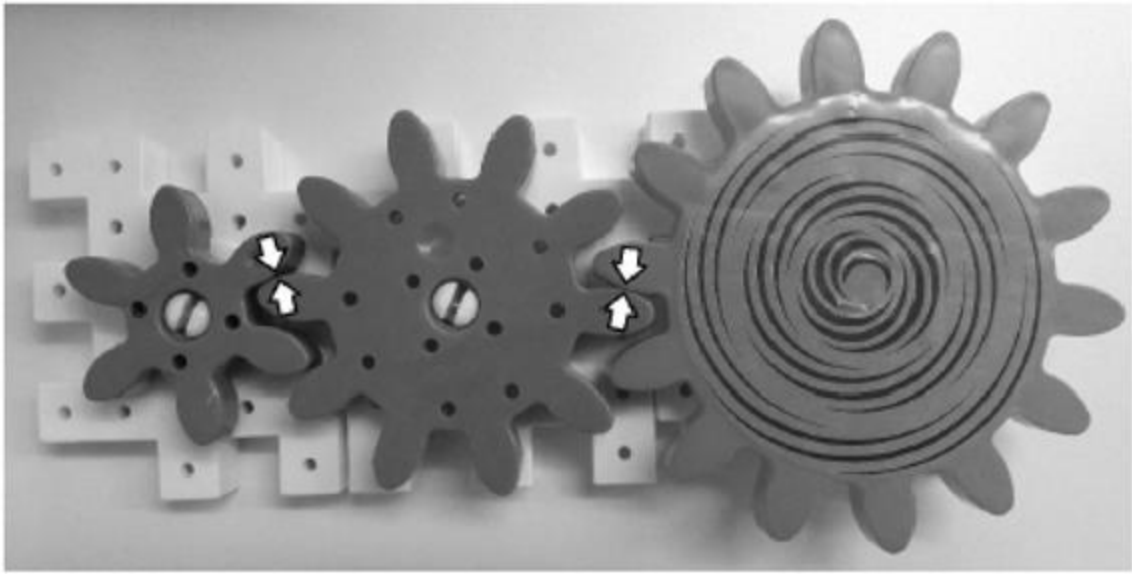
Lo studente ha bisogno di matematizzare il modello della situazione, tradurre gli oggetti e le relazioni del mondo reale in oggetti e relazioni della matematica.

Questo vuol dire adattare il disegno a figure geometriche in cui utilizzare teoremi, oppure cogliere relazioni in modo da scrivere una equazione, o funzione, ecc.

Esempi interessanti di rappresentazioni a

Marcello ha un gioco di costruzioni con alcune ruote dentate. Sperimenta il montaggio di tre ruote: una piccola, una media e una grande.

All'inizio del suo esperimento segna con una freccia quattro denti di queste ruote (come si vede nella figura):



Marcello comincia poi a girare la ruota dentata media.

Di quanti giri, al minimo, Marcello dovrà girare la ruota dentata media affinché le coppie di frecce siano di nuovo riunite come si vede nella figura qui sopra?

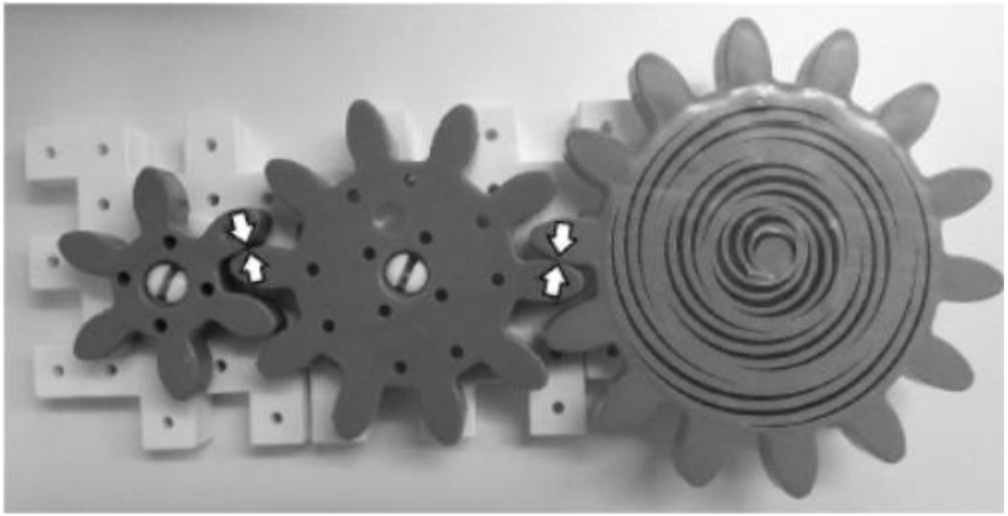
Spiegate il vostro ragionamento.

(*26° Rally Matematico Transalpino – Prova I – gennaio-febbraio 2018*)

Rappresentazioni schematizzate e rielaborate ***per comprendere***

Analizzando le prestazioni degli studenti sul problema delle ruote dentate, (questa analisi è stata fatta su un campione di 250 studenti di scuole prevalentemente di Milano o Lombardia), si sono potuti osservare aspetti che riguardano prima di tutto il loro modo di sperimentare, anche concretamente, l'ingranaggio per comprenderlo, e si sono ritrovati i loro sforzi nel cercare di spiegare come esso funzioni. Interessante la modalità con cui allievi di diverse classi (secondaria di primo grado o biennio di secondo grado) hanno cercato di passare dalla foto dell'ingranaggio ad una loro rielaborazione schematizzata, che evidenziasse gli aspetti essenziali al fine della risoluzione.

Dall’immagine alla comprensione e alla risoluzione

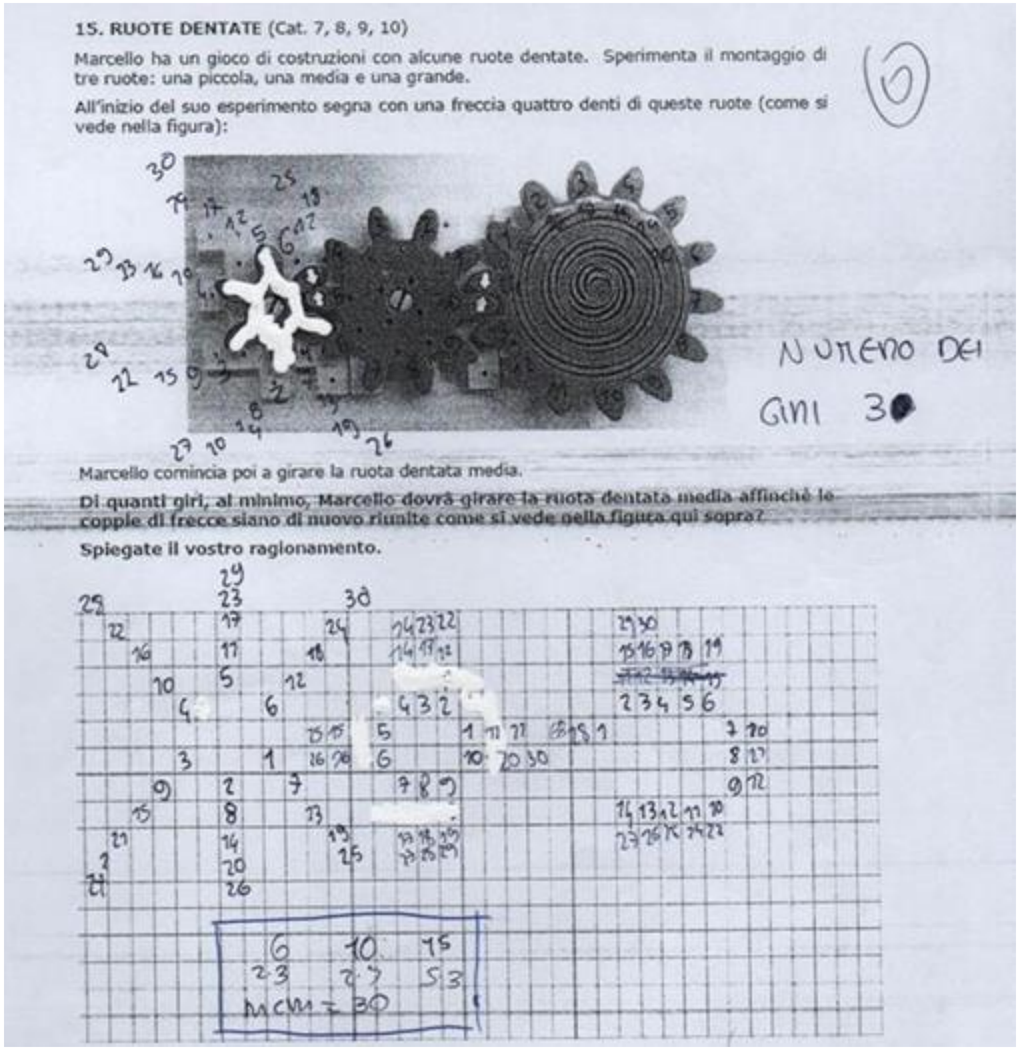


Un gruppo (seconda biennio) scrive:

“Le tre ruote ***p, m, g*** *(piccola, media, grande) hanno rispettivamente 6, 10 e 14 dentini. La ruota presa in considerazione deve muoversi così di 10 dentini per compiere un giro completo. Di conseguenza, le ruote si sposteranno a ogni giro della ruota di 10 dentini. Considerando la ruota* ***p****, la* ***m*** *dovrà compiere tre giri affinché le freccette raggiungano il punto di partenza. Considerando la ruota* ***g****, la* ***m*** *dovrà compiere 7 giri.*

Affinché le due coppie di freccette raggiungano contemporaneamente il punto di partenza, è necessario trovare il minimo comune multiplo tra 7 e 3: 7x3=21, quindi la ruota ***m*** *deve compiere 7 volte 3 giri per la ruota* ***p*** *e 3 volte 7 giri per la ruota* ***g****”.*

Nel caso seguente c’è un paziente conteggio illustrato dalla figura, che però non sortisce alla risposta corretta a causa di errori di calcolo:



15. RUOTE DENTATE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marcello ha un gioco di costruzioni con alcune ruote dentate. Sperimenta il montaggio di tre ruote: una piccola, una media e una grande.

All’inizio del suo esperimento segna con una freccia quattro denti di queste ruote (come si vede nella figura):

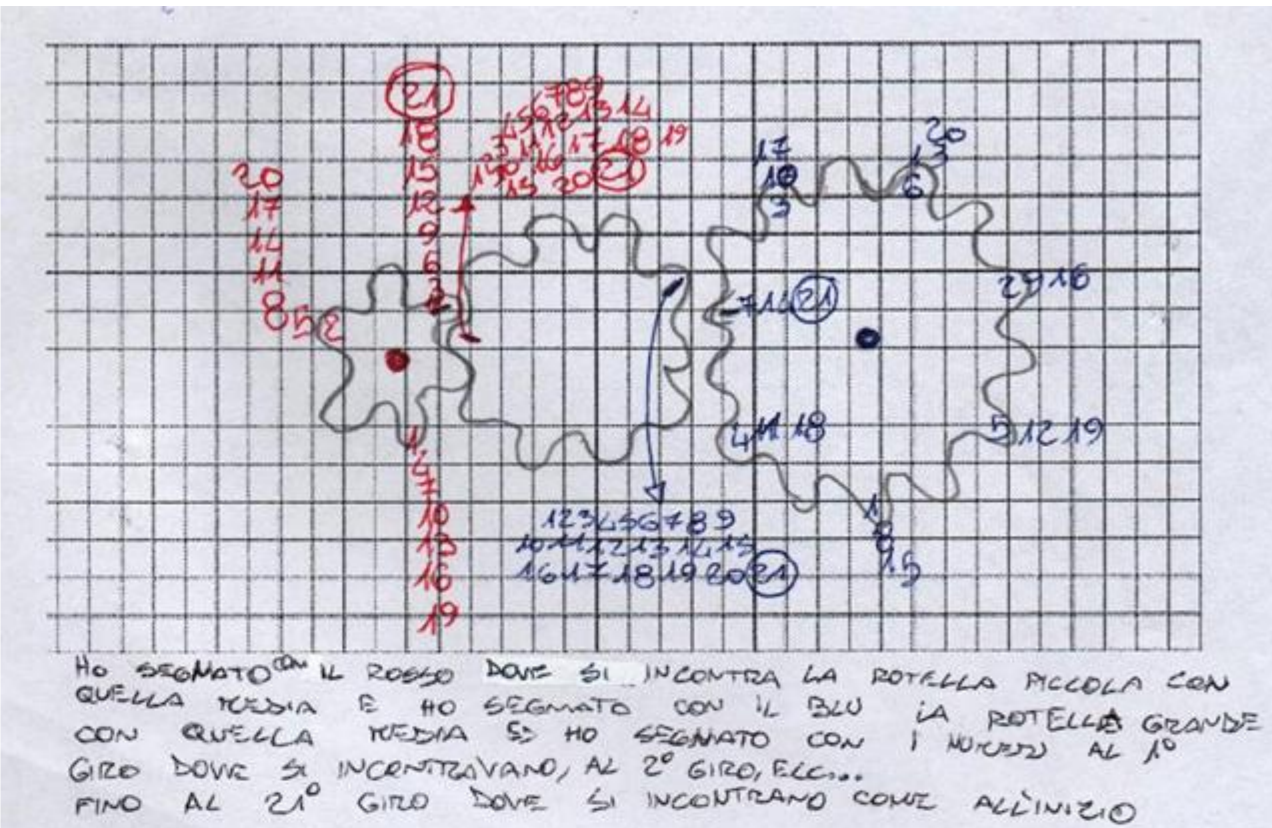
Marcello comincia poi a girare la ruota dentata media.

Di quanti giri, al minimo, Marcello dovrà girare la ruota dentata media affinché le coppie di frecce siano di nuovo riunite come si vede nella figura qui sopra?

Spiegate il vostro ragionamento.

In questo protocollo si può osservare come l’argomentazione può servirsi di diversi registri rappresentativi, che si intrecci ano per illustrare il percorso mentale compiuto.

anche in questo caso l’immagine dell’ingranaggio viene riprodotta evidenziando i diversi numeri dei denti. Pazientemente, annotando il numero di giri, i ragazzi hanno trovato il primo numero al quale le posizioni richieste coincidevano nuovamente



La ricerca precedente sulle competenze di modellizzazione degli studenti ha dimostrato che la modellizzazione è difficile per molti studenti e il loro processo di risoluzione può essere ostacolato in ogni fase di questo processo (Blum, 2011; Galbraith & Stillman, 2006).

Ad esempio, gli studenti potrebbero avere difficoltà a determinare e organizzare gli oggetti rilevanti, oppure potrebbero avere difficoltà a vedere oggetti matematici o formulare termini matematici.

A causa delle scarse competenze di modellizzazione, gli studenti hanno bisogno di aiuto in questa fase.

*Ma **quali sono le istruzioni strategiche**, vale a dire le istruzioni sul disegno, quale forma di sostegno finalizzata a promuovere la modellizzazioni, nel fare ipotesi sulla realtà o nella scelta di un modello matematico?*

Casi di studio hanno indicato che la costruzione di rappresentazioni per un problema di modellizzazione può essere un modo efficace per facilitare i processi di modellizzazione degli studenti

(Rellensmann, 2019)

Fare un disegno è considerata **una potente strategia di apprendimento** (Fiorella & Kuhlmann, 2020; Schmeck et al., 2014) e **problem solving** (Cox, 1999).

L'utilizzo di un disegno autogenerato per risolvere un problema di modellizzazione comporta la generazione di una rappresentazione strutturalmente analoga del problema matematico utilizzando somiglianze visuo-spaziali (Rellensmann et al., 2017; Van Meter & Firetto, 2013).

Questo significa che lo studente che costruisce un disegno dispone i segni sul piano della carta per rappresentare gli oggetti e le loro relazioni come descritto nel problema di modellizzazione (Schnotz & Bannert, 2003).

Ulteriormente, lo studente può utilizzare numeri o variabili per specificare le relazioni nel disegno (ad esempio, per indicare una lunghezza o per indicare dati sconosciuti). In un disegno per un problema matematico che rimanda al mondo reale, gli **oggetti illustrati possono essere rappresentati situazionalmente o matematicamente** (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Rellensmann et al., 2017; Van Garderen et al., 2013).

Rappresentazione della situazione o in campo matematico?

Un oggetto viene disegnato *in base alla situazione* se rappresenta l'aspetto fisico dell'oggetto.

Un oggetto è *disegnato matematicamente* se rappresenta solo la matematica rilevante dell'oggetto caratteristiche (ad esempio, angoli e lunghezze).

Gli studenti spesso costruiscono un disegno che include sia le caratteristiche della situazione reale, sia quelle della matematica.

(Rellensmann et al., 2017)

Le ricerche citate testimoniano che c**’è una correlazione positiva tra la capacità di risolvere problemi di modellizzazione quando ci sono maggiori competenze degli studenti sulla realizzazione di disegni che ben riproducono le caratteristiche matematiche, rispetto a quegli studenti con minori capacità rappresentative per disegni «matematici»**

…quindi la ricerca può evolversi

attraverso lo studio delle prestazioni degli allievi rispetto a problemi di modellizzazione, e alla relazione tra i disegni realizzati dai ragazzi e la risoluzione di questi problemi.

Le nostre considerazioni

- E’ utile e interessante indagare sulla capacità di risolvere problemi in relazione alle rappresentazioni esterne che il problema consente di utilizzare.
- I problemi di modellizzazione di situazioni reali offrono un contesto ricco per studiare la correlazione tra buone rappresentazioni matematiche e buona risoluzione.

Grazie per l’attenzione!

chiara.andra@uniupo.it

rosa.iaderosa@gmail.com