

**Seminari FDS**

*Politecnico di Milano 18/1/2023*

# ➤ **Paradossi dei sistemi elettorali**

➤ *Orazio Puglisi*

➤ *Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini"*

➤ *Università degli studi di Firenze*



# Un esempio: dove andiamo in vacanza?

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Brasile	Canada



# Un esempio: dove andiamo in vacanza?

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Brasile	Canada
Brasile	Canada	Australia
Canada	Australia	Brasile

Enrico ha un'idea



# Australia vs Brasile

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Brasile	
Brasile		Australia
	Australia	Brasile



# Australia vs Brasile

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Brasile	Australia
Brasile	Australia	Brasile



# Australia vs Brasile

Giorgia	Giuseppe	Enrico
Australia	Brasile	Australia

Vince Australia e Brasile viene eliminato



<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Brasile	Canada
Brasile	Canada	Australia
Canada	Australia	Brasile



Giorgia	Giuseppe	Enrico
Australia	Brasile	Canada
Brasile	Canada	Australia
Canada	Australia	Brasile





<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia		Canada
	Canada	Australia
Canada	Australia	



# Australia vs Canada

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Canada	Canada
Canada	Australia	Australia



# Australia vs Canada

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Canada	Canada



# Australia vs Canada

Giorgia	Giuseppe	Enrico
Australia	Canada	Canada

Vince il Canada  
La destinazione preferita da Enrico



Giuseppe propone un'altra cosa





# Australia vs Canada

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia		Canada
	Canada	Australia
Canada	Australia	



# Australia vs Canada

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Canada	Canada
Canada	Australia	Australia



# Australia vs Canada

Giorgia	Giuseppe	Enrico
Australia	Canada	Canada

Vince Canada e Australia viene eliminata





<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Australia	Brasile	Canada
Brasile	Canada	Australia
Canada	Australia	Brasile



Giorgia	Giuseppe	Enrico
<del>Australia</del>	Brasile	Canada
Brasile	Canada	<del>Australia</del>
Canada	<del>Australia</del>	Brasile



<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
	Brasile	Canada
Brasile	Canada	
Canada		Brasile



# Brasile vs Canada

<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Brasile	Brasile	Canada
Canada	Canada	Brasile



# Brasile vs Canada


<b>Giorgia</b>	<b>Giuseppe</b>	<b>Enrico</b>
Brasile	Brasile	Canada



# Brasile vs Canada

Giorgia	Giuseppe	Enrico
Brasile	Brasile	Canada

Vince Brasile, la meta preferita da Giuseppe



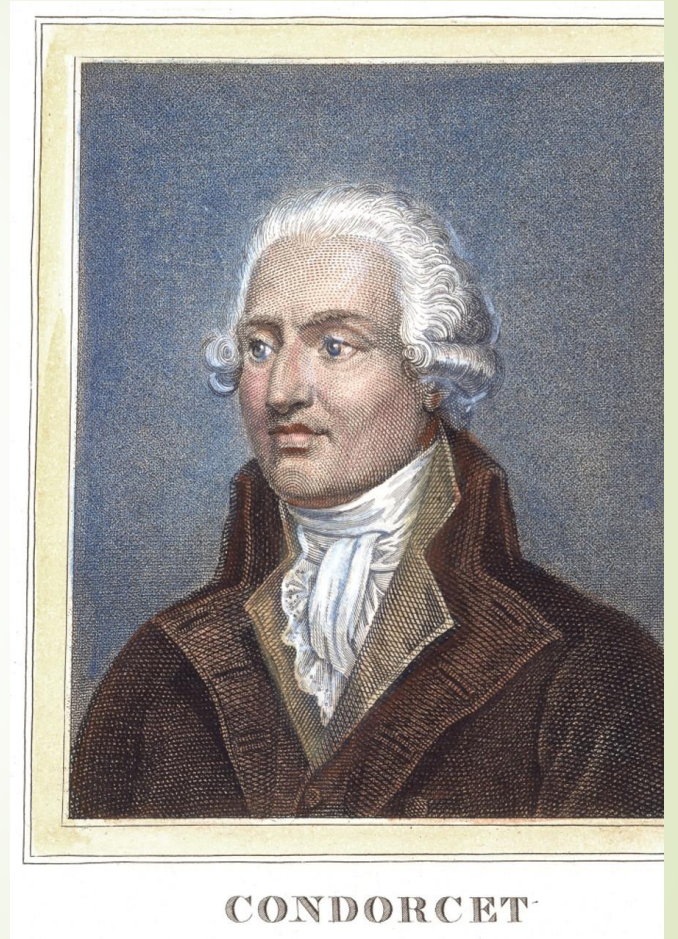
Possiamo immaginare cosa potrebbe proporre Giorgia, e l'esito della nuova votazione

➡ Un esempio del *Paradosso di Condorcet*

*Marie Jean Antoine Nicolas de  
Caritat*

*Marchese di Condorcet*

*(1743-1794)*





# Elezioni in un dipartimento universitario



Professoressa A



Professor B



L'odiato professor C

**Si usa il Metodo Di Borda**



)  
Jean-Charles de Borda  
(1733-1799)



## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B



## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Voti A



## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Voti A

3 x 7

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Voti A

$$3 \times 7 + 2 \times 7$$

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Voti A

$$3 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 1 = 37$$

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Voti A

$$3 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 1 = 37$$

Voti B

$$2 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 1 = 36$$

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Voti A

$$3 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 1 = 37$$

Voti B

$$2 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 1 = 36$$

Voti C

$$1 \times 7 + 1 \times 7 + 3 \times 1 = 17$$

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Voti A

$$3 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 1 = 37$$

Voti B

$$2 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 1 = 36$$

Voti C

$$1 \times 7 + 1 \times 7 + 3 \times 1 = 17$$

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B		A
C		B

Voti A

$$3 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 1 = 37$$

Voti B

$$2 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 1 = 36$$

Voti C

$$1 \times 7 + 1 \times 7 + 3 \times 1 = 17$$

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	C	A
C	A	B

Voti A

$$3 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 1 = 37$$

Voti B

$$2 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 1 = 36$$

Voti C

$$1 \times 7 + 1 \times 7 + 3 \times 1 = 17$$



## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	C	A
C	A	B

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	C	A
C	A	B

Voti A

$$3 \times 7 + 1 \times 7 + 2 \times 1 = 30$$

Voti B

$$2 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 1 = 36$$

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
B	C	A
C	A	B

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
	C	A
	A	B

## Elezioni in un dipartimento

7	7	1
A	B	C
C	C	A
B	A	B

**Voto**  
**Strategico**

Voti A  $3 \times 7 + 1 \times 7 + 2 \times 1 = 30$   
Voti B  $1 \times 7 + 3 \times 7 + 1 \times 1 = 29$   
Voti C  $2 \times 7 + 2 \times 7 + 3 \times 1 = 31$



# Alcuni sistemi elettorali

- Maggioranza
- Doppio Turno
- Metodo di Hare
- Metodo di Borda
- Metodo di Condorcet



# Doppio turno

Dopo il primo turno si tiene un secondo turno in cui si scontrano i due candidati col maggior numero di voti

- ▶ Elezioni presidenziali francesi

# Metodo di Hare

Thomas Hare (1806-1891)

- Ogni elettore fornisce una lista di preferenze
  - Viene eliminato il candidato che compare in prima posizione il minor numero di volte.
  - Si ripete il processo fino a quando rimane un solo candidato.
1. Australia: House of Representatives, sindaci.
  2. Irlanda: Elezione del Presidente.





# Metodo di Hare: un esempio

11	5	4
Anna	Bruna	Carlo
Carlo	Carlo	Bruna
Bruna	Anna	Anna

## Metodo di Hare: un esempio

11	5	4
Anna	Bruna	<b>Carlo</b>
Carlo	Carlo	Bruna
Bruna	Anna	Anna

Carlo viene eliminato

# Metodo di Hare: un esempio

11	5	4
Anna	Bruna	
		Bruna
Bruna	Anna	Anna

# Metodo di Hare: un esempio

11	5	4
Anna	Bruna	Bruna
Bruna	Anna	Anna

## Metodo di Hare: un esempio

11	5	4
Anna	<b>Bruna</b>	<b>Bruna</b>
Bruna	Anna	Anna

Bruna viene eliminata ed Anna è il vincitore

# Metodo di Hare: un esempio

11	5	4
Anna	Bruna	Carlo
Carlo	Carlo	Bruna
Bruna	Anna	Anna

Anna è davvero una buona scelta? Che dire di Carlo?

# Elezioni a Walkabout Creek



Dottoressa Black



Giudice Harris



Colonnello White

Si usa il metodo di Hare

# Gli Smith

- ▶ Molto amici della dott.ssa Black
- ▶ apprezzano il giudice Harris
- ▶ non sopportano il colonnello White
- ▶ Voterebbero  $B > H > W$






# Un imprevisto



Gli Smith non riescono a votare

# I risultati: vince il giudice Harris

417	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B



Come è andata

417	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B

Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B

## Come è andata

417	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B

Black 499

Harris 500

White 609

La dottoressa Black è eliminata

## Come poteva andare


419	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B

## Come è andata

417	82	143	357	285	324
		H	H	W	W
H	W		W		H
W	H	W	B	H	

## Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B



## Come è andata

417	82	143	357	285	324
H	W	H	H	W	W
W	H	W	W	H	H

## Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B

## Come è andata

417	82	143	357	285	324
H	W	H	H	W	W
W	H	W	W	H	H

Harris 917

White 691

Vince Harris

## Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B

### Come è andata

417	82	143	357	285	324
H	W	H	H	W	W
W	H	W	W	H	H

Harris 917

White 691

Vince Harris

### Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B	H	H	W	W
H	W	B	W	B	H
W	H	W	B	H	B

Black 501

Harris 500

White 609

Harris viene eliminato



### Come è andata

417	82	143	357	285	324
H	W	H	H	W	W
W	H	W	W	H	H

Harris 917

White 691

Vince Harris

### Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B			W	W
	W	B	W	B	
W		W	B		B

## Come è andata

417	82	143	357	285	324
H	W	H	H	W	W
W	H	W	W	H	H

Harris 917

White 691

Vince Harris

## Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B	B	W	W	W
W	W	W	B	B	B

### Come è andata

417	82	143	357	285	324
H	W	H	H	W	W
W	H	W	W	H	H

Harris 917

White 691

Vince Harris

### Come poteva andare

419	82	143	357	285	324
B	B	B	W	W	W
W	W	W	B	B	B

Black 644

White 966

Vince White



# Metodo di Condorcet

- Ogni candidato si scontra contro tutti gli altri.
- Il vincitore è quello che vince ciascuno di questi scontri.

Problema: non sempre c'è un vincitore  
(paradosso di Condorcet)

# Confrontiamo questi sistemi

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A



Maggioranza



# Maggioranza

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A



# Maggioranza

<b>36</b>	<b>24</b>	<b>20</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>4</b>
A	D	B	E	C	C



# Maggioranza

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C

Voti A 36  
Voti B 20  
Voti C 12  
Voti D 24  
Voti E 18

**Il vincitore è A**

# Doppio turno

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A



# Doppio turno

<b>36</b>	<b>24</b>	<b>20</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>4</b>
A	D	B	E	C	C

# Doppio turno

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C

Voti A 36  
Voti B 20  
Voti C 12  
Voti D 24  
Voti E 18

Superano il turno **A** e **D**

# Doppio turno

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

# Doppio turno

36	24	20	18	8	4
A	D				
		D		D	
			D		D
D	A	A	A	A	A

# Doppio turno

36	24	20	18	8	4
A	D	D	D	D	D
D	A	A	A	A	A

# Doppio turno

36	24	20	18	8	4
A	D	D	D	D	D
D	A	A	A	A	A



# Doppio turno

36	24	20	18	8	4
A	D	D	D	D	D

Voti A 36  
Voti D 74

Il vincitore è **D**

# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti A 36

Voti B 20

Voti C 12

Voti D 24

Voti E 18

# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti A 36

Voti B 20

**Voti C 12**

Voti D 24

Voti E 18

C viene eliminato

# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	D	B
E	E	D	B	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti A 36    Voti B 24    Voti D 32    Voti E 18

# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	D	B
E	E	D	B	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti A 36    Voti B 24    Voti D 32    **Voti E 18**

E viene eliminato

# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	D	B	B	D	B
B	B	D	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti A 36    Voti B 42    Voti D 32

# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	D	B	B	D	B
B	B	D	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti A 36    Voti B 42    **Voti D 32**

D viene eliminato



# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	B	B	B	B	B
B	A	A	A	A	A



# Metodo di Hare

36	24	20	18	8	4
A	B	B	B	B	B

Voti A 36

Voti B 74

Il vincitore è **B**

# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	<b>E</b>	C	C
<b>E</b>	C	D	B	D	B
C	<b>E</b>	C	C	<b>E</b>	<b>E</b>
B	B	<b>E</b>	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti E

# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	<b>E</b>	C	C
<b>E</b>	C	D	B	D	B
C	<b>E</b>	C	C	<b>E</b>	<b>E</b>
B	B	<b>E</b>	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti E (36 x 4)

# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti E  $(36 \times 4) + (24 \times 3)$

# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti E  $(36 \times 4) + (24 \times 3) + (20 \times 2)$

# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti E  $(36 \times 4) + (24 \times 3) + (20 \times 2) + (18 \times 5)$



# Metodo di Borda

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti E  $(36 \times 4) + (24 \times 3) + (20 \times 2) + (18 \times 5) + (8 \times 3) + (4 \times 3) = 382$

Voti A 254

Voti B 324

Voti C 378

Voti D 312

# Metodo di Borda

**E vince l'elezione**

36	24	20	18	8	4
A	D	B	<b>E</b>	C	C
<b>E</b>	C	D	B	D	B
C	<b>E</b>	C	C	<b>E</b>	<b>E</b>
B	B	<b>E</b>	D	B	D
D	A	A	A	A	A

Voti E  $(36 \times 4) + (24 \times 3) + (20 \times 2) + (18 \times 5) + (8 \times 3) + (4 \times 3) = \mathbf{382}$

Voti A 254

Voti B 324

Voti C 378

Voti D 312

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

**C** contro **A**

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
A				C	C
	C				
C		C	C		
	A	A	A	A	A

**C** contro **A**

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
A	C	C	C	C	C
C	A	A	A	A	A

**C** contro **A**

# Metodo di Condorcet

<b>36</b>	<b>24</b>	<b>20</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>4</b>
A	C	C	C	C	C

Voti A 36

Voti C 74

**C** contro **A**

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
A	C	C	C	C	C

Voti A 36

Voti C 74

**C** è il vincitore

**C** contro **A**

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

**C** contro **D**



# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
	D			C	C
	C	D		D	
C		C	C		
			D		D
D					

**C** contro **D**

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
C	D	D	C	C	C
D	C	C	D	D	D

**C** contro **D**

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
C	D	D	C	C	C

Voti C 66

Voti D 44

**C** è il vincitore

**C** contro **D**

# Metodo di Condorcet

36	24	20	18	8	4
A	D	B	E	C	C
E	C	D	B	D	B
C	E	C	C	E	E
B	B	E	D	B	D
D	A	A	A	A	A

**C** vince tutti i ballottaggi  
**C** è il Vincitore di Condorcet

Cinque candidati, cinque metodi elettorali, cinque diversi vincitori!





# Scelte Sociali



Metodo per produrre una lista di preferenze, partendo dalle liste di preferenze degli elettori.

# Principio di unanimità di Pareto



Vilfredo Pareto (1848-1923)

Se ogni elettore preferisce il candidato A al candidato B, nella scelta sociale A sarà preferito a B



# Monotonicità

- ▶ Nella scelta sociale A è preferito a B.
- ▶ Quando si ripetono le elezioni, nessuno degli elettori ha cambiato preferenze, relativamente ad A e B, **in sfavore** di A.
- ▶ La scelta sociale è **MONOTONA** se, anche questa volta, A è preferito a B.





# Un esempio

- ▶ Scegliamo un elettore (Michele)
- ▶ Chiediamo a tutti gli elettori le loro preferenze
- ▶ La scelta sociale è la lista di Michele
- ▶ Soddisfa il principio di Pareto.
- ▶ È monotona.

Questo sistema elettorale ha un nome:

DITTATURA



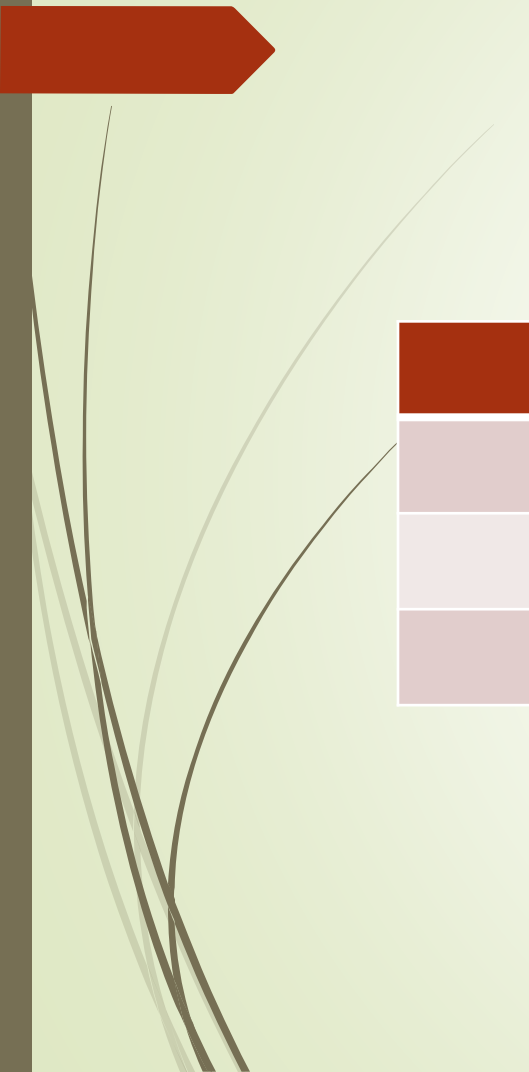
## Teorema di Muller-Satterthwaite (1977)

Se il numero di candidati è almeno tre e la Scelta Sociale soddisfa il criterio di Pareto, è monotona e produce un singolo vincitore, allora è una Dittatura.



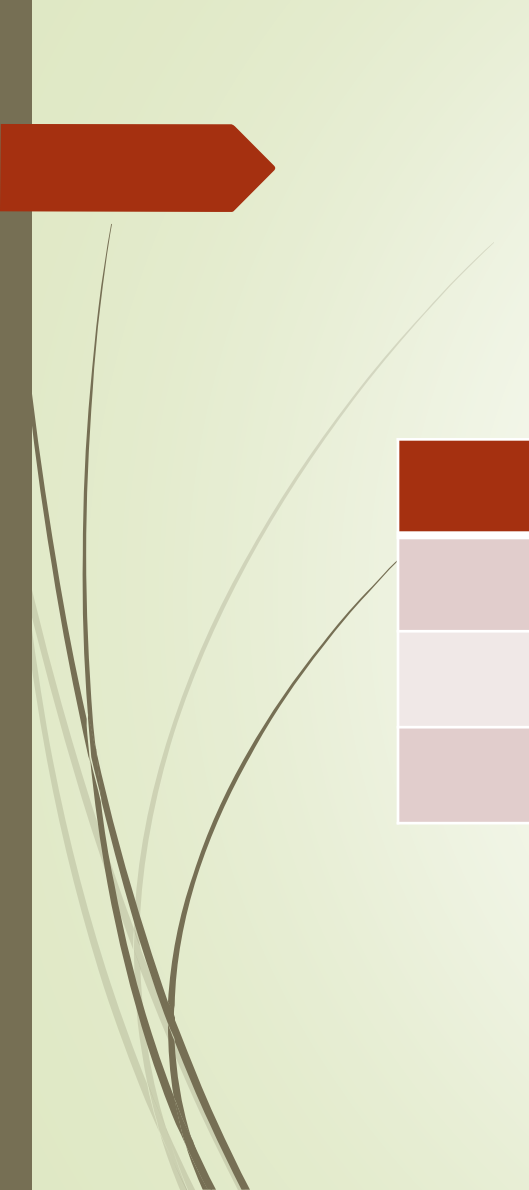
Attenzione!  
Maggioranza non  
è monotona





34	33	33
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A è preferito a C



34	31	35
A	B	C
B	C	B
C	A	A


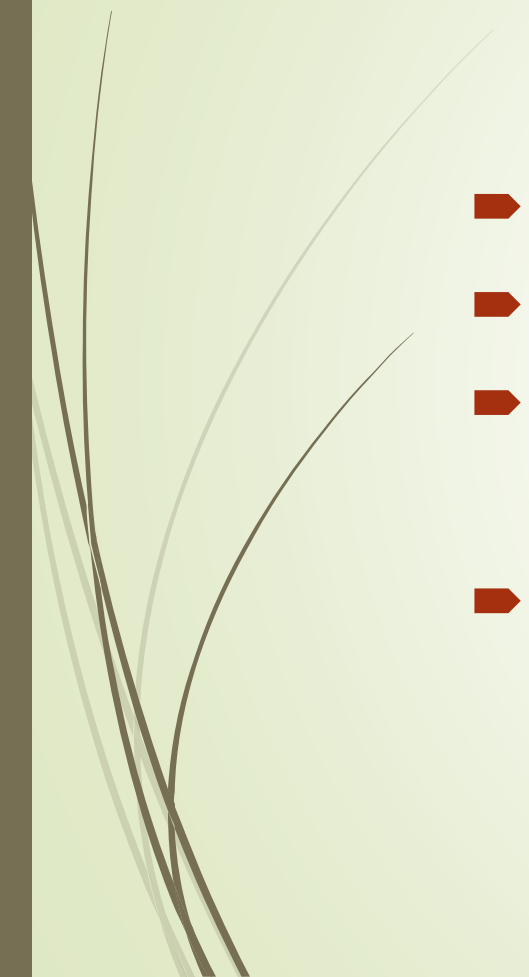
C è preferito ad A



Rimangono le elezioni  
con due soli candidati



Un nuovo problema:  
il *gerrymandering*

- 
- 
- Il territorio viene diviso in Collegi Elettorali
  - In ogni collegio si fronteggiano i due candidati
  - Ogni collegio viene assegnato al vincitore
  
  - Come si definiscono i collegi?











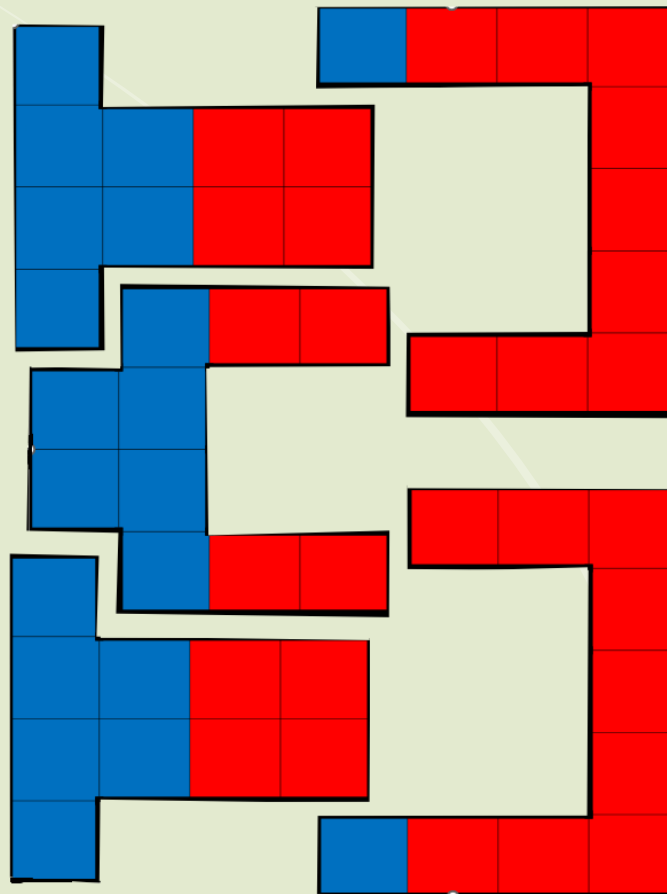
Un esempio:

50 voti

5 collegi da 10 voti

2 collegi Rossi

3 collegi Blu





Elbridge Gerry (1744-1814)  
Governatore del Massachusetts



# Bestiario

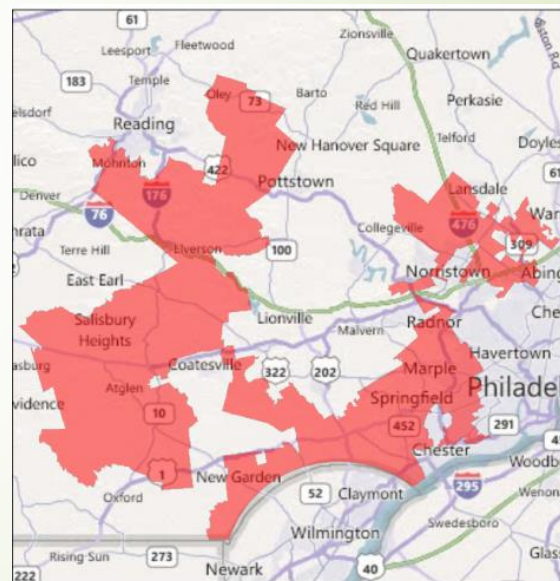


# Bestiario

Texas, distretto 35: *Upside elephant*



Pennsylvania, distretto 7: *Goofy kicking Donald Duck*



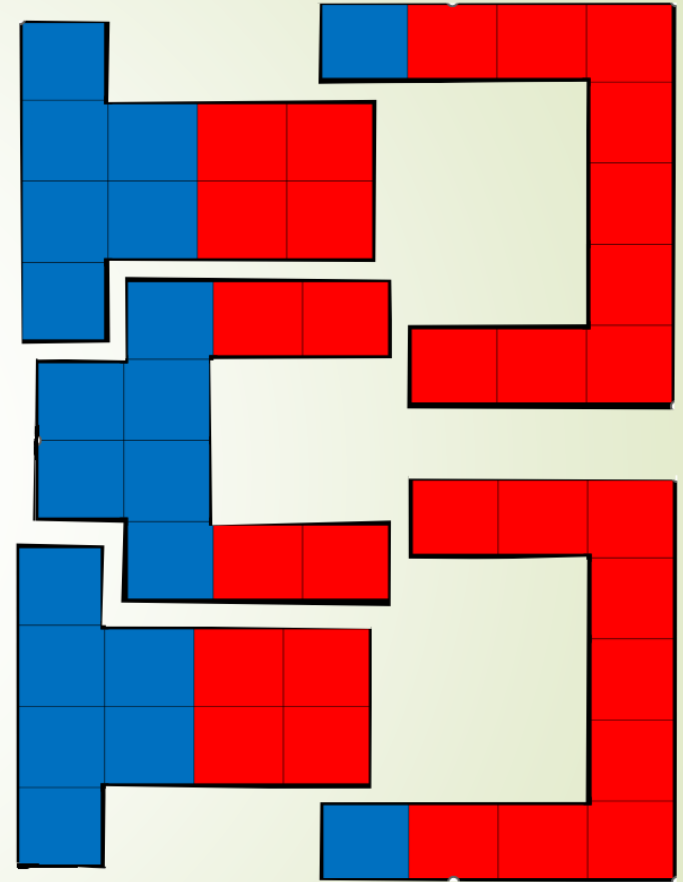



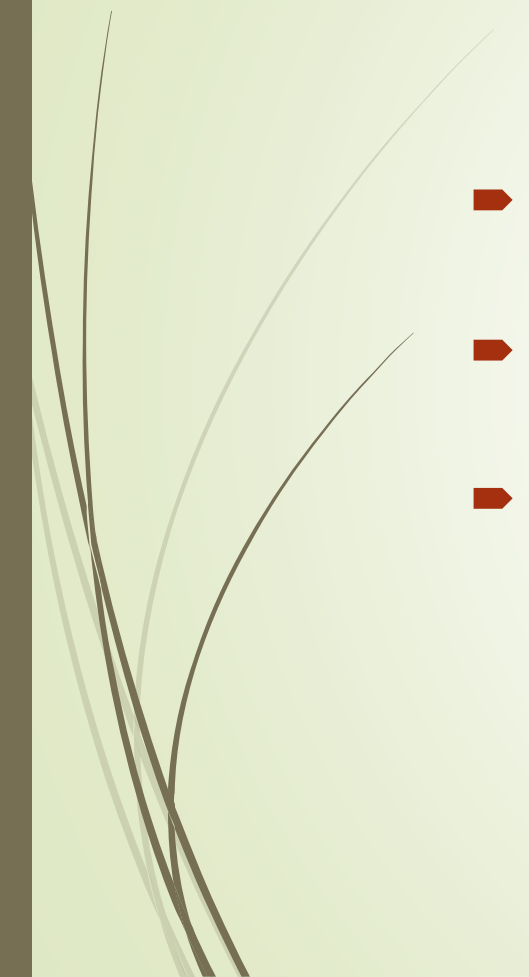


## Tecniche di gerrymandering

### **Packing**

Un elettorato viene *compresso* in pochi collegi, per minimizzare il numero di collegi vinti



- 
- 
- Nel 2011 il governatore (repubblicano) del Wisconsin modifica i collegi per l'assemblea nazionale.
  - Nelle elezioni del 2012 i democratici ottengono un numero di voti maggiore dei repubblicani.
  - I repubblicani ottengono 60 dei 99 seggi dell'Assemblea di stato.

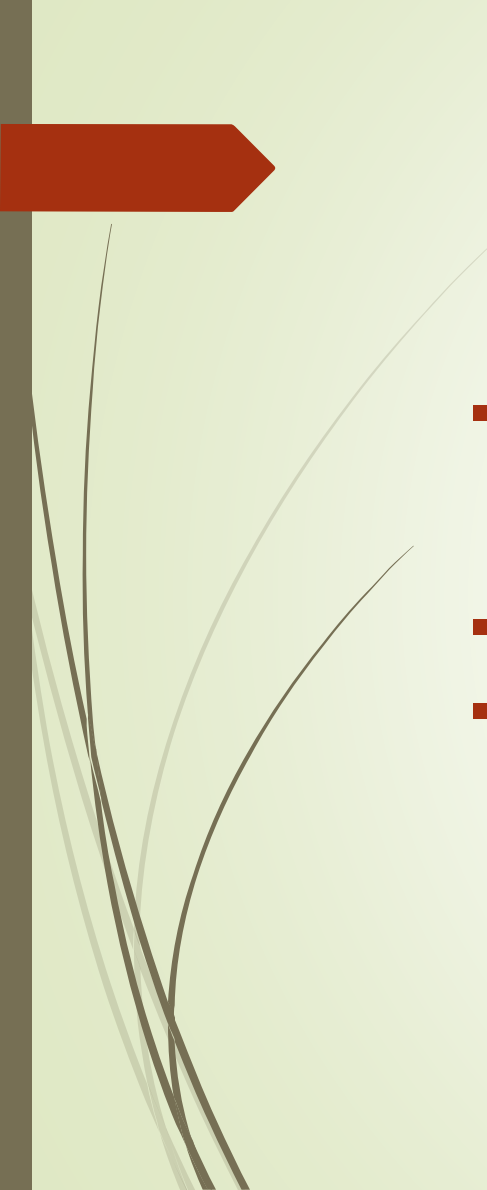


Come scoprire il  
gerrymandering?



# Efficiency Gap

- È un indicatore dei *Voti Sprecati*.
- È un valore tra  $-0,5$  e  $0,5$ .
- Se non c'è stato gerrymandering il valore è vicino allo 0.
- La soglia di attenzione proposta è intorno a  $0,07$ .

- 
- Nel 2016 una corte federale riconosce come “incostituzionale” la nuova mappa dei distretti del Wisconsin (causa *Whitford vs. Nichol*).
  - Prima sentenza di questo tipo dal 1986
  - Per la prima volta viene usato uno strumento matematico (efficiency gap).











# Indice di compattezza

- ▶ È un indicatore della *geometria* del distretto elettorale.
- ▶ Si basa sulla *Disuguaglianza di Steiner*  $4\pi A/P^2 \leq 1$
- ▶ È un numero minore o uguale a 100 e vale 100 solo per collegi *circolari*.
- ▶ È auspicabile che sia vicino al 100.



Cerchio

I.C. = 100

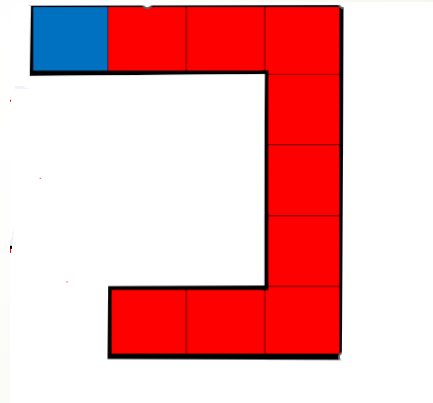
Quadrato

I.C. = 78,53

Rettangolo 10 x 1

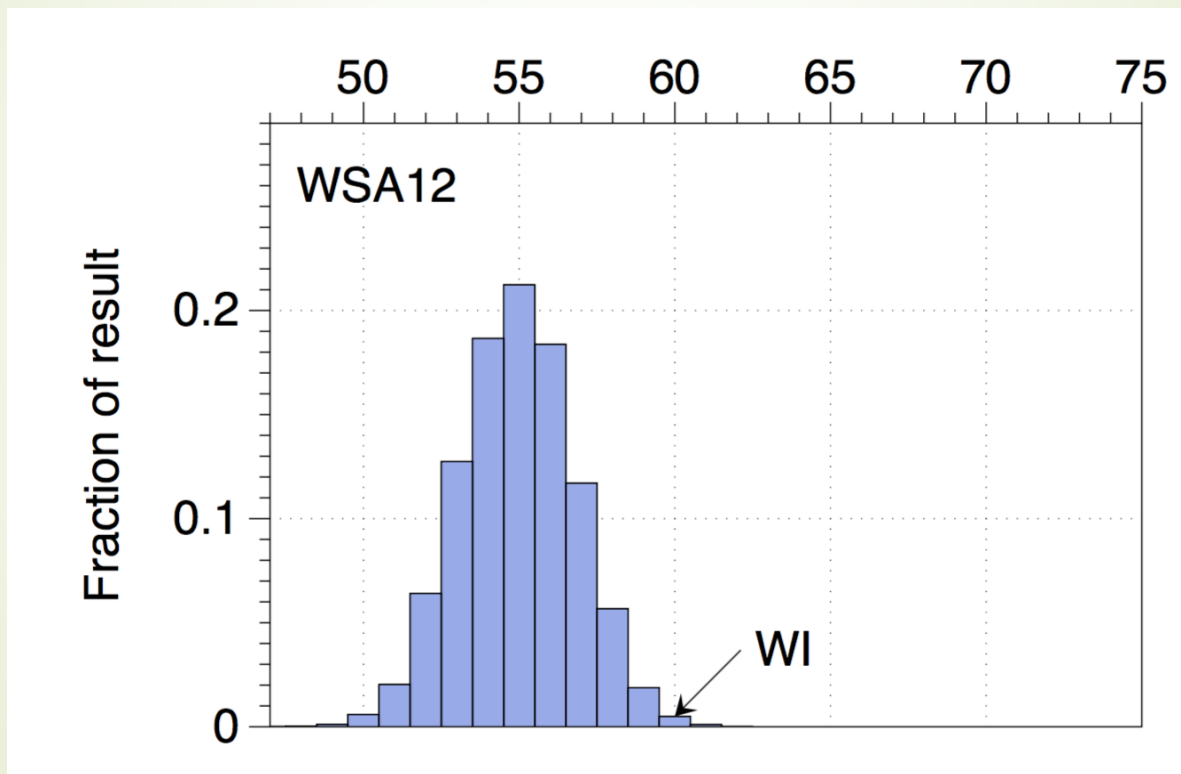
I.C. = 25,9

I.C. = 25,9



# Campionamento

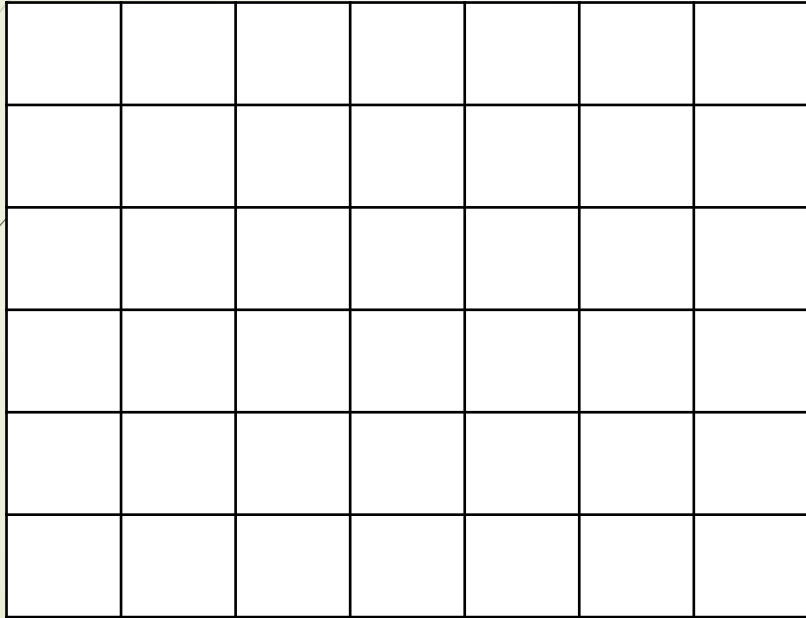
## *Elezioni del Wisconsin 2012*



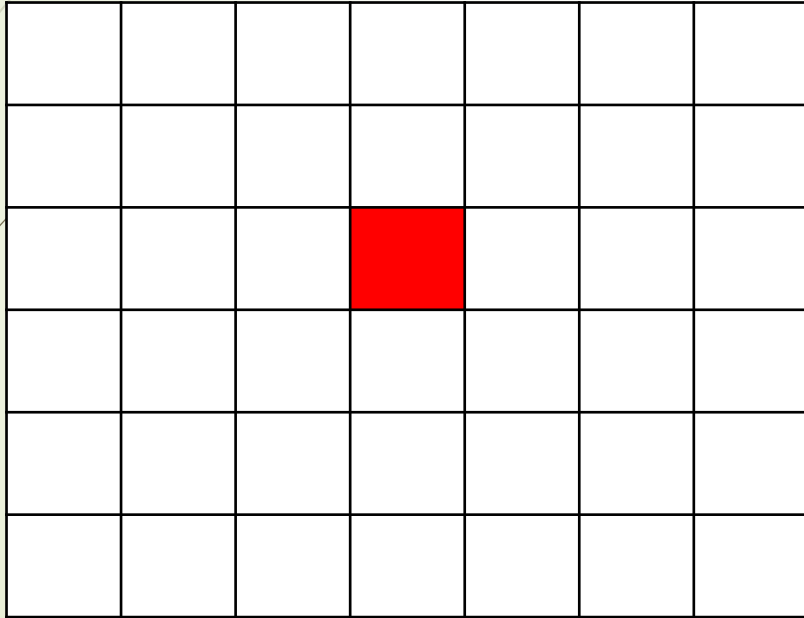
Il risultato delle elezioni del 2012 è **estremamente** improbabile



# Passeggiate casuali

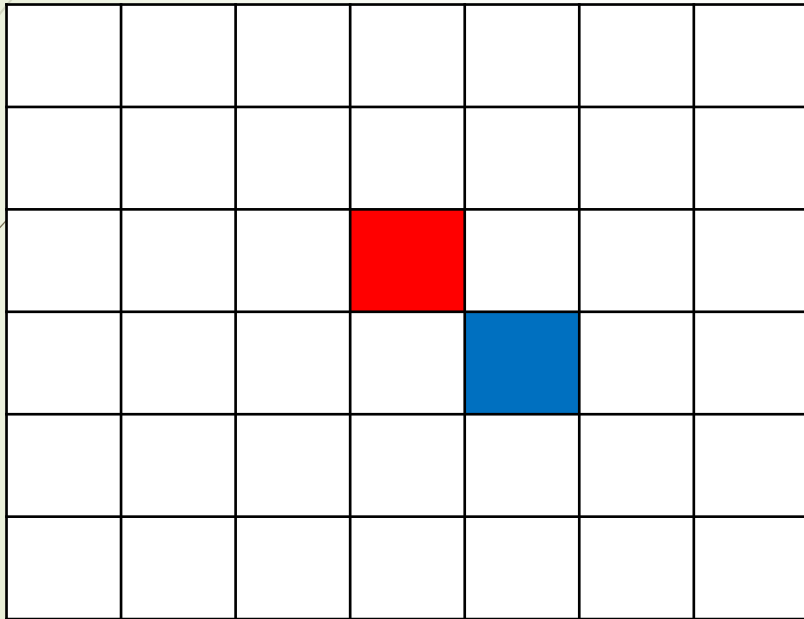


# Passeggiate casuali



Ci muoviamo in una casella vicina  
con probabilità  $1/8$

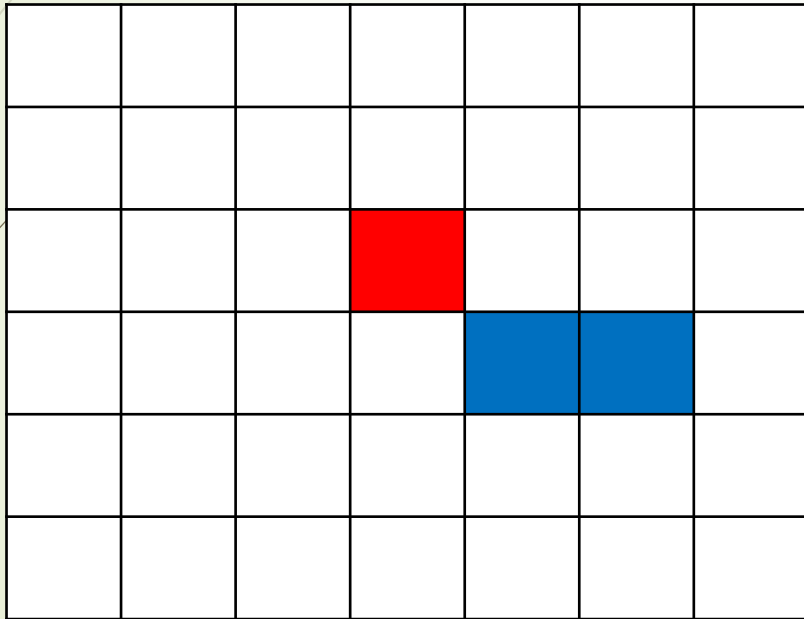
# Passeggiate casuali



Ci muoviamo in una casella vicina  
con probabilità  $1/8$



# Passeggiate casuali

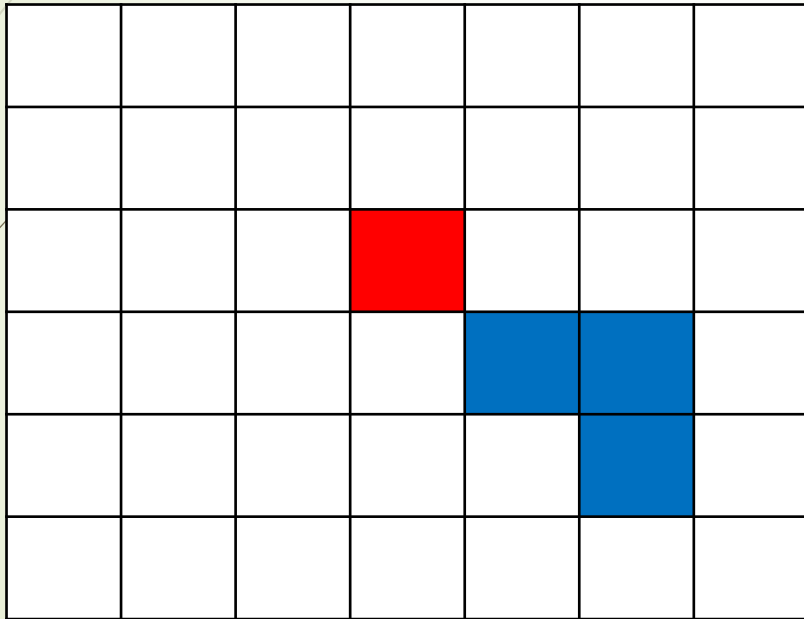


Si continua così





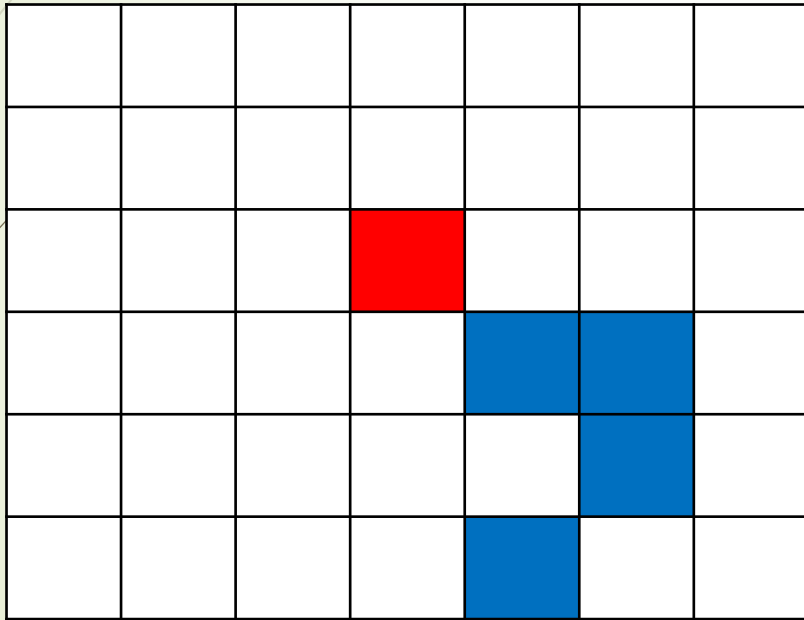
# Passeggiate casuali



Si continua così

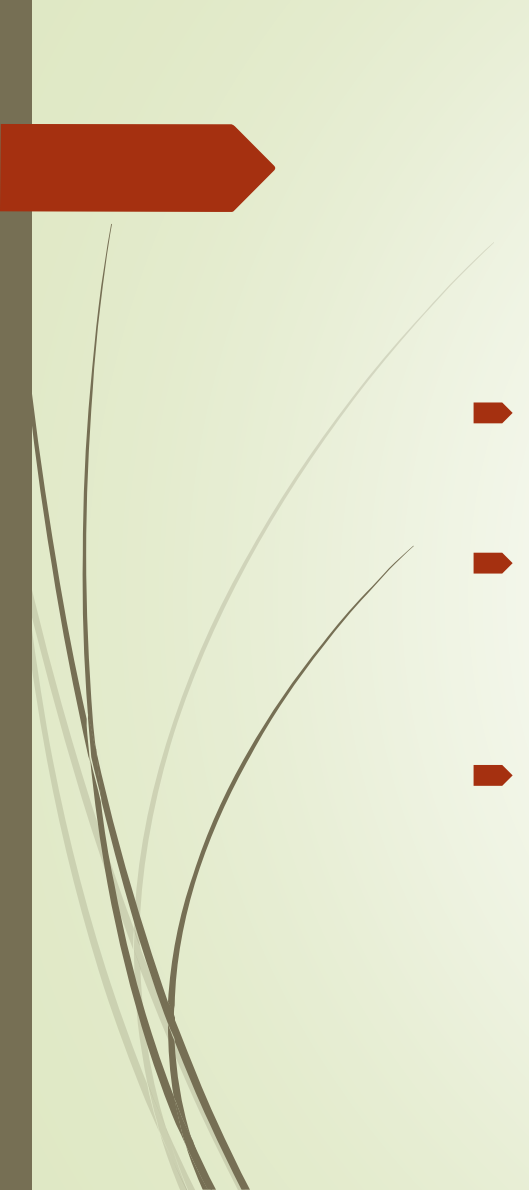


# Passeggiate casuali



Si continua così.

Dopo un po' la posizione diventa 'casuale'

- 
- Una passeggiata casuale di questo genere converge alla distribuzione uniforme.
  - Se abbiamo molti oggetti, è più facile selezionare oggetti casuali con una *Passeggiata Casuale* piuttosto che direttamente.
  - Per testare il gerrymandering bisogna *passeggiare* su grafi molto particolari.



# Esempi

<https://mggg.org/metagraph/7x7.html>



Rimane il Metodo Ateniese





# Sorteggio

*That's all Folks!*



kalibak