

Seminari FDS 2022

Matematica per Scenari: un percorso didattico di modellistica matematica

Caterina Bassi

Laboratorio FDS – Dip. Matematica – Politecnico di Milano



Perché fare didattica con la modellistica matematica?

Competenze chiave europee di cittadinanza

- Competenza matematica e competenze di base in scienza, tecnologia e ingegneria

*"La competenza matematica è la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per **risolvere** una serie di **problemi in situazioni quotidiane** (...) La competenza matematica comporta a diversi livelli, la **capacità di usare modelli matematici** di pensiero e di presentazione e la disponibilità a farlo"*

Raccomandazione del Consiglio Europeo relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (22 maggio 2018)

Linee guida per gli istituti professionali (DPR 87/2010), Linee guida per gli istituti tecnici (DPR 88/2010), Indicazioni nazionali per i licei (DPR 89/2010)

Problemi

"Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma **non sa come raggiungerla**" (Karl Duncker)

Diversi tipi di problemi matematici:

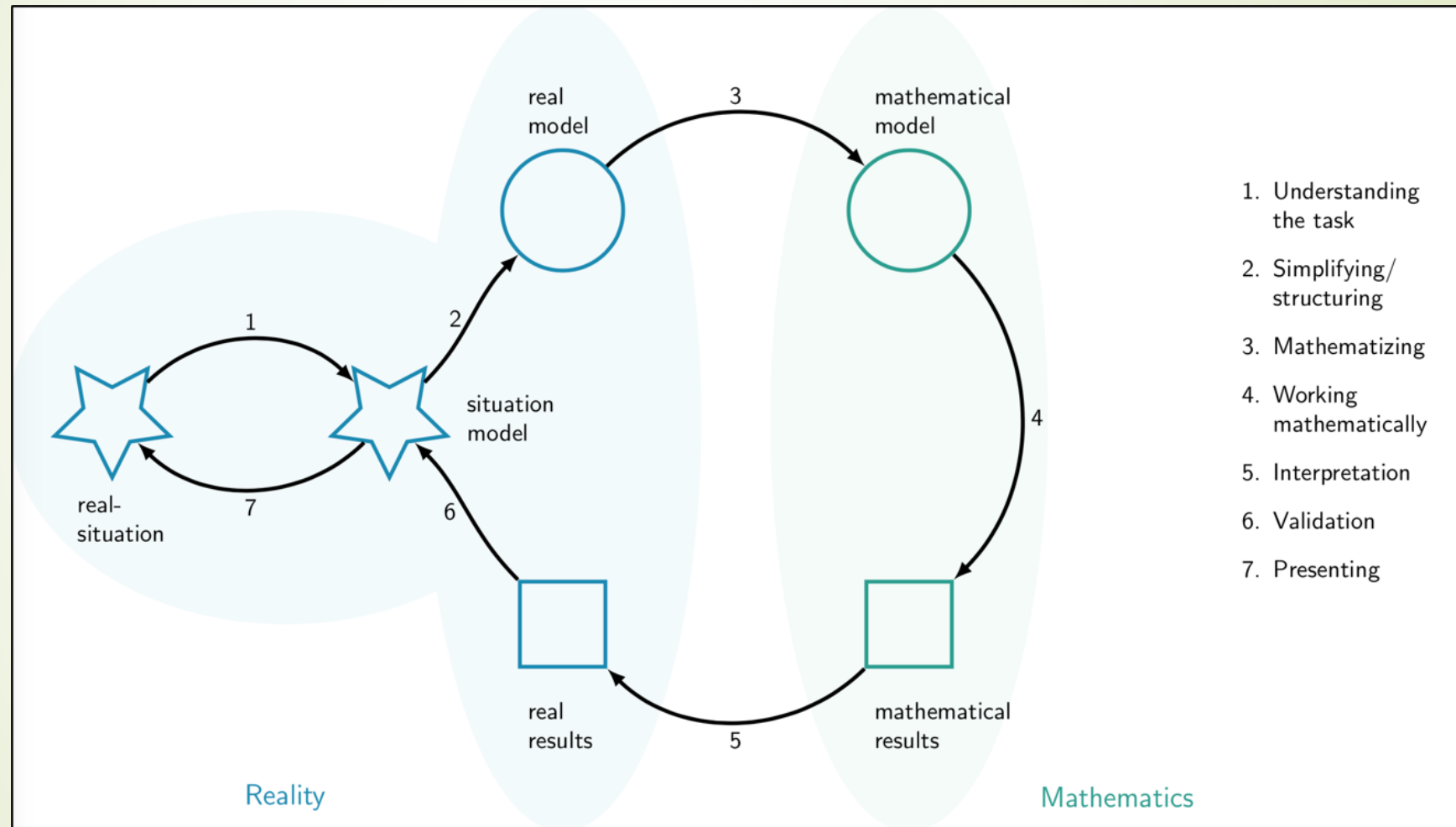
➤ **Puri**: il problema sorge all'interno dell'universo matematico

$$(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$$

$$(\quad)(\quad) = x^2+7x+6$$

➤ **Di realtà**: il problema sorge nel mondo reale (discipline scolastiche diverse dalla matematica, la vita quotidiana, il mondo intorno a noi)

Un ciclo della modellistica



Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know? What can we do? In S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp.73- 96). Springer.



Step e competenze (1)

- ▶ Step 1 – 2 (Comprendere il compito – Semplificare/strutturare)
 - ▶ Fare assunzioni, semplificare la situazione
 - ▶ Identificare variabili chiave e costruire relazioni tra variabili
 - ▶ Distinguere tra informazioni rilevanti e non rilevanti
- ▶ Step 3 (Matematizzare)
 - ▶ Matematizzare quantità rilevanti e le loro relazioni
 - ▶ Scegliere una notazione matematica appropriata e rappresentare graficamente la situazione
- ▶ Step 4 (Lavorare matematicamente)
 - ▶ Utilizzare strategie euristiche (es. Dividere il problema in parti, ...)
 - ▶ Usare la conoscenza matematica per risolvere il problema

Step e competenze (2)

► Step 5 (Interpretare)

- Interpretare risultati matematici in contesti extra-matematici
- Generalizzare soluzioni sviluppate in situazioni particolari

► Step 6 (Validare)

- Controllare criticamente e riflettere sulle soluzioni trovate
- Rivedere alcune parti del modello o ripercorrere il processo di modellistica se le soluzioni non sono adeguate rispetto alla situazione reale
- Mettere in generale in discussione il modello

► Step 7 (Presentare)

- Utilizzare una struttura appropriata, rispetto al genere ed allo stile di presentazione scelto
- Presentare in modo adeguato al destinatario
- Presentare in modo rigoroso, con affermazioni supportate dai dati
- Presentare in modo corretto dal punto di vista formale

- Maas, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM* 38(2), 113–142.
- Bassi, C., & Brunetto, D. (2022). Students' mathematical modelling competencies developed in addressing a real-world problem, *Rivista Matematica dell'Università di Parma*, submitted.



Un problema di realtà

L'assessore alla cultura chiede:

- che uso fanno i giovani della biblioteca comunale?
- cosa piacerebbe loro trovarvi?

La risposta: un'indagine scientifica

Il **contesto**:

- 4^a liceo scientifico (Romano di Lombardia)
- PCTO

"Senso di perplessità dovuto alle troppe strade percorribili senza avere a disposizione una bussola"



Struttura del progetto

Due momenti:

1. Introduzione

- **Introduzione alla statistica**
- **Attività 0:** introduzione alla modellistica

2. Azione

- **Attività 1:** proposta delle domande per il questionario
- **Attività 2:** formulazione delle domande/opzioni di risposta
- **Attività 3:** utilizzo del software R
- **Attività 4:** analisi dei risultati del questionario
- **Attività 5:** stesura del report

Esploriamole nel dettaglio!



Introduzione alla statistica

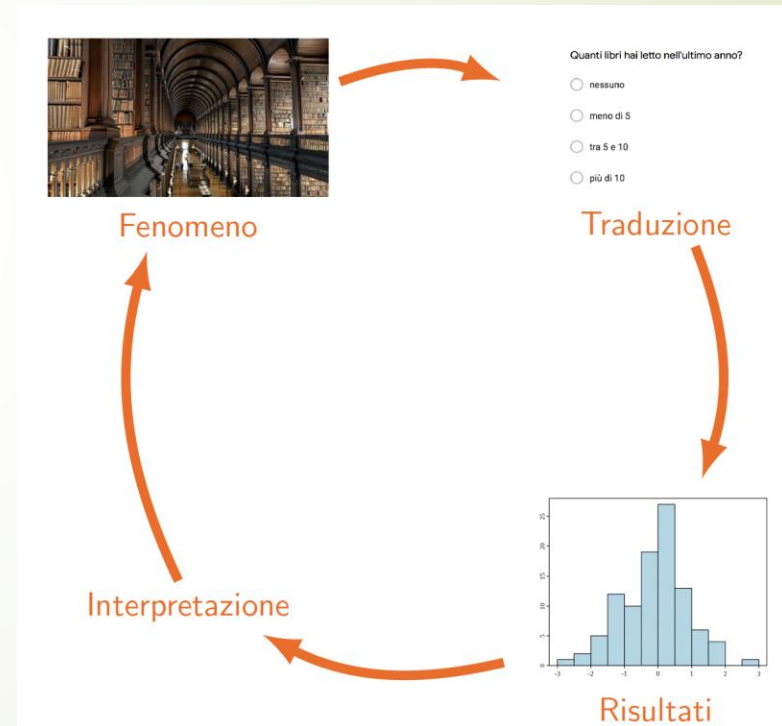
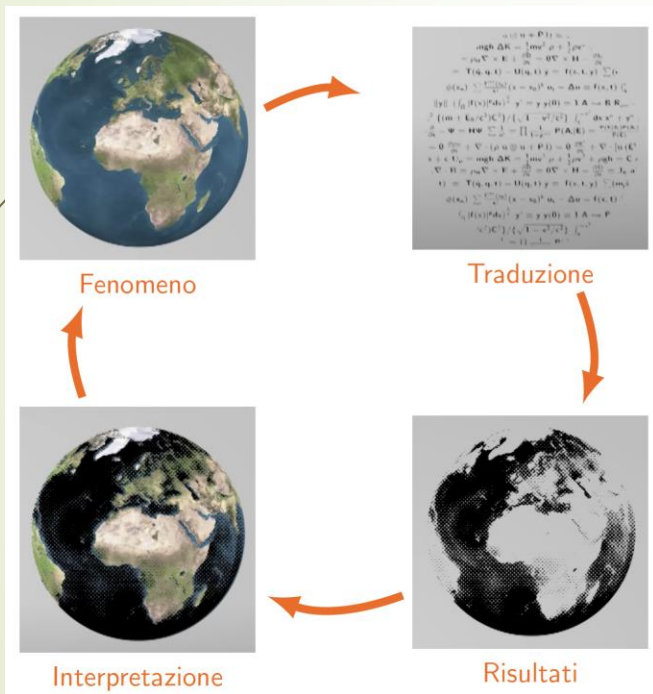
- **CHI:** Ricercatrici in statistica (Prof.ssa Francesca Ieva e dott.ssa Chiara Masci)
- **MODALITA':** Lezione frontale
- **CHE COSA:** Le ricercatrici hanno introdotto alcuni strumenti di base di **statistica descrittiva ed inferenziale**, presentando i principali indicatori statistici (media, varianza, ...) ed alcune rappresentazioni grafiche dei dati statistici (istogrammi, boxplot, ...)
- **DURATA:** 3 incontri da 2h (online)



Attività 0: introduzione alla modellistica matematica

- **CHI:** Ricercatori in didattica della matematica e modellistica
- **CHE COSA:**
 - Un ciclo della modellistica semplificato e un esempio di processo di modellistica nell'ambito delle social networks
 - Task **A0.T1:** *Quali potrebbero essere le tappe di un processo di modellizzazione matematica che ci aiuti a rispondere alle richieste dell'assessore?*
- **MODALITA':** Lezione frontale con discussione di classe
- **DURATA:** 1 incontro da 2h (online)

Attività 0: introduzione alla modellistica matematica





Attività 1: proposta delle domande per il questionario

- ▶ **CHI:** Studenti, insegnante e ricercatori
- ▶ **CHE COSA:**
 - ▶ Esposizione ad alcuni esempi di questionari con focus sulle diverse dimensioni (o punti di vista) che il questionario permette di esplorare
 - ▶ Discussione sull'impatto della likert scale scelta
 - ▶ Task **A1.T1:** *Proponete alcune domande da inserire nel questionario. Fatevi ispirare da questionari ai quali vi è capitato di rispondere oppure cercate qualche esempio in rete*
 - ▶ Task **A1.T2:** *Considerato il fenomeno "Utilizzo della biblioteca", individuate i punti di vista che le domande che avete proposto vi permettono di esplorare*
 - ▶ Task **A1.T3:** *Scartate le domande che non sono rilevanti rispetto alla richiesta dell'assessore*
- ▶ **MODALITA':** Lavoro di gruppo
- ▶ **DURATA:** 1 incontro 2h (online) + attività supplementare degli studenti (2 settimane)

Attività 1: proposta delle domande per il questionario

Dal report:

"In particolare abbiamo deciso di indagare le seguenti dimensioni: frequenza di frequentazione, motivo di frequentazione, i servizi della biblioteca e come sono utilizzati, la dimensione affettiva, abitudini di lettura, generi letterari preferiti e informazioni personali."

"In primo luogo, sono state eliminate le domande ritenute poco pertinenti con l'obiettivo dello studio. In questo senso sono state eliminate le domande legate più alle abitudini di lettura del campione che al rapporto di quest'ultimo con la biblioteca. Un esempio di domanda eliminata è la seguente:


5. Chi ti ha avvicinato alla lettura? *

- Genitori
- Amici
- Scuola
- Altro

Fare assunzioni, semplificare la situazione (S1-2)

Identificare variabili chiave (S1-2)

Distinguere tra informazioni rilevanti e non rilevanti (S1-2)



Attività 2: formulazione delle domande/opzioni di risposta

- **CHI:** Studenti, insegnante e ricercatori
- **CHE COSA:**
 - Task **A2.T1:** *Dividetevi in gruppi e, all'interno di ciascun gruppo, prendete in esame le domande relative a due punti di vista. Migliorate le domande ed, eventualmente, aggiungetene altre. Prestate particolare attenzione a: (i) Formulare domande ed opzioni di risposta in modo chiaro. (ii) Scegliere una scala adeguata. (iii) Scegliere adeguate opzioni di risposta.*
 - Da un questionario preliminare ad uno definitivo
- **MODALITA':** Lavoro di gruppo
- **DURATA:** 1 incontro da 2h (online) + attività supplementare degli studenti (2 settimane)

Attività 2: formulazione delle domande/opzioni di risposta

5. Quanti libri leggi in un anno?

- Nessuno
- Da uno a tre
- Da tre a cinque
- Da cinque a dieci
- Più di dieci

Matematizzare quantità rilevanti e loro relazioni (S3)

3. In che paese frequenti la biblioteca? * 

Inserisci la risposta



2. In che paese frequenti la biblioteca? *

- Romano di Lombardia
- Altro
- Non frequento la biblioteca

Fare assunzioni, semplificare la situazione (S1-2)

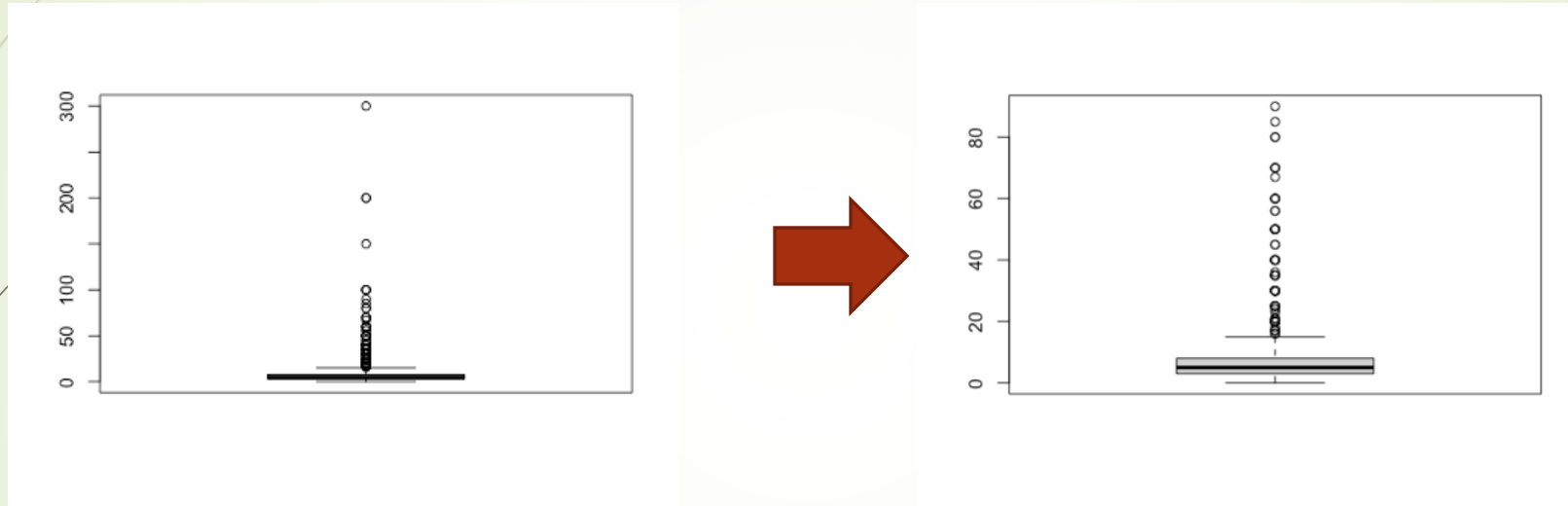
Distinguere tra informazioni rilevanti e non rilevanti (S1-2)



Attività 3 e 4: utilizzo del software e analisi dei risultati del questionario

- ▶ **CHI:** Studenti, insegnante e ricercatori
- ▶ **CHE COSA:**
 - ▶ Utilizzo del software di statistica R: in modalità tutorial gli studenti fanno pratica con dataset forniti dai ricercatori e con l'analisi del questionario preliminare
 - ▶ Analisi dei risultati del questionario definitivo (1 mese)
- ▶ **MODALITA':** Lavoro di gruppo (in autonomia e sotto la supervisione dell'insegnante)
- ▶ **DURATA:** 1 incontro da 2h (online) + attività supplementare degli studenti (1 mese)

Attività 3 e 4: utilizzo del software e analisi dei risultati del questionario



Controllare criticamente e riflettere sulle soluzioni trovate (S6)



Attività 3 e 4: utilizzo del software e analisi dei risultati del questionario

Dal report:

"I dati raccolti mostrano che la biblioteca è vista dai giovani principalmente come un luogo in cui prendere in prestito libri. E' anche apprezzata come luogo di studio e per la fruizione di attività culturali, anche se in misura minore."

"Il tempo di attesa per prendere in prestito un libro è considerato accettabile o breve. Questo è dovuto probabilmente alla velocità del sistema di prestito interbibliotecario che è ben sviluppato."

"Specialmente il sottocampione dei frequentatori della biblioteca di Romano di Lombardia ha sottolineato la necessità aumentare il numero delle postazioni di studio"

**Interpretare risultati
matematici in contesti
extra-matematici (S5)**



Attività 5: stesura del report scientifico

- **CHI:** studenti, insegnante e ricercatori (nel ruolo di revisori)
- **CHE COSA:** Gli studenti hanno prodotto un report scientifico da consegnare al committente
- **MODALITA':** Lavoro di gruppo
- **DURATA:** 1 incontro da 2h con i ricercatori (online)
+ attività supplementare degli studenti, sia con il supporto dell'insegnante sia autonoma (circa 3 settimane)

Attività 5: stesura del report scientifico

Dalla prima alla seconda stesura:

- Eliminazione di affermazioni non supportate dai dati. Un esempio:
"Concludendo, è stato interessante scoprire che al servizio fornito dalla biblioteca viene attribuita una forte valenza sociale nel diffondere la cultura anche tra coloro che hanno pochi mezzi dal punto di vista economico"
- Aggiunta di una sezione introduttiva
- Miglioramento dal punto di vista formale (es. Introduzione della numerazione delle figure)

Presentare in modo rigoroso, con affermazioni supportate dai dati (S7)

Presentare con una struttura appropriata, rispetto al genere ed allo stile di presentazione scelto (S7)

Presentare in modo corretto ed efficace dal punto di vista formale (S7)



Osservazioni

- L'assessore alla cultura ha sollevato un **problema rispetto ad un certo fenomeno**
- Gli studenti hanno usato la **matematica** (modellistica+statistica) **per indagare il fenomeno e per supportare le loro "risposte"** alla richiesta iniziale
- Gli studenti hanno percorso **tutti gli step** del ciclo della modellistica
- **Report scientifico**: uno **strumento efficace per valutare** gli studenti in un'attività di modellistica



Aspetti motivazionali

Mi è piaciuto...

- **analizzare** i risultati del questionario definitivo, perché ero molto curiosa nel vedere come avrebbero risposto i miei coetanei
- **lavorare** ad un progetto diverso dal solito e di stampo più universitario
- **analizzare** i dati del questionario dandogli una collocazione nella realtà insieme ai miei compagni
- Il fatto che, nonostante le diverse **difficoltà** che abbiamo avuto, siamo riusciti a fare un lavoro davvero fatto bene

Scenari ... più "agili"

MOOCs For Teachers



Polimi
MATEC101

Matematica per Scenari

- **Corso per insegnanti** di scuola secondaria di secondo grado
- Introduzione
- Tre **esperienze didattiche di modellistica matematica**
- **Materiali** e approfondite **indicazioni metodologiche** per l'attuazione in classe
- "**Carta e penna**" + approfondimento (fortemente suggerito!) con l'uso di un **software**



Gli scenari

WEEK 1



Matematica

e Sport

WEEK 2



Matematica

e Catalizzatori

WEEK 3



Matematica

e Social Network

Matematica e sport

MATEMATICA E SPORT

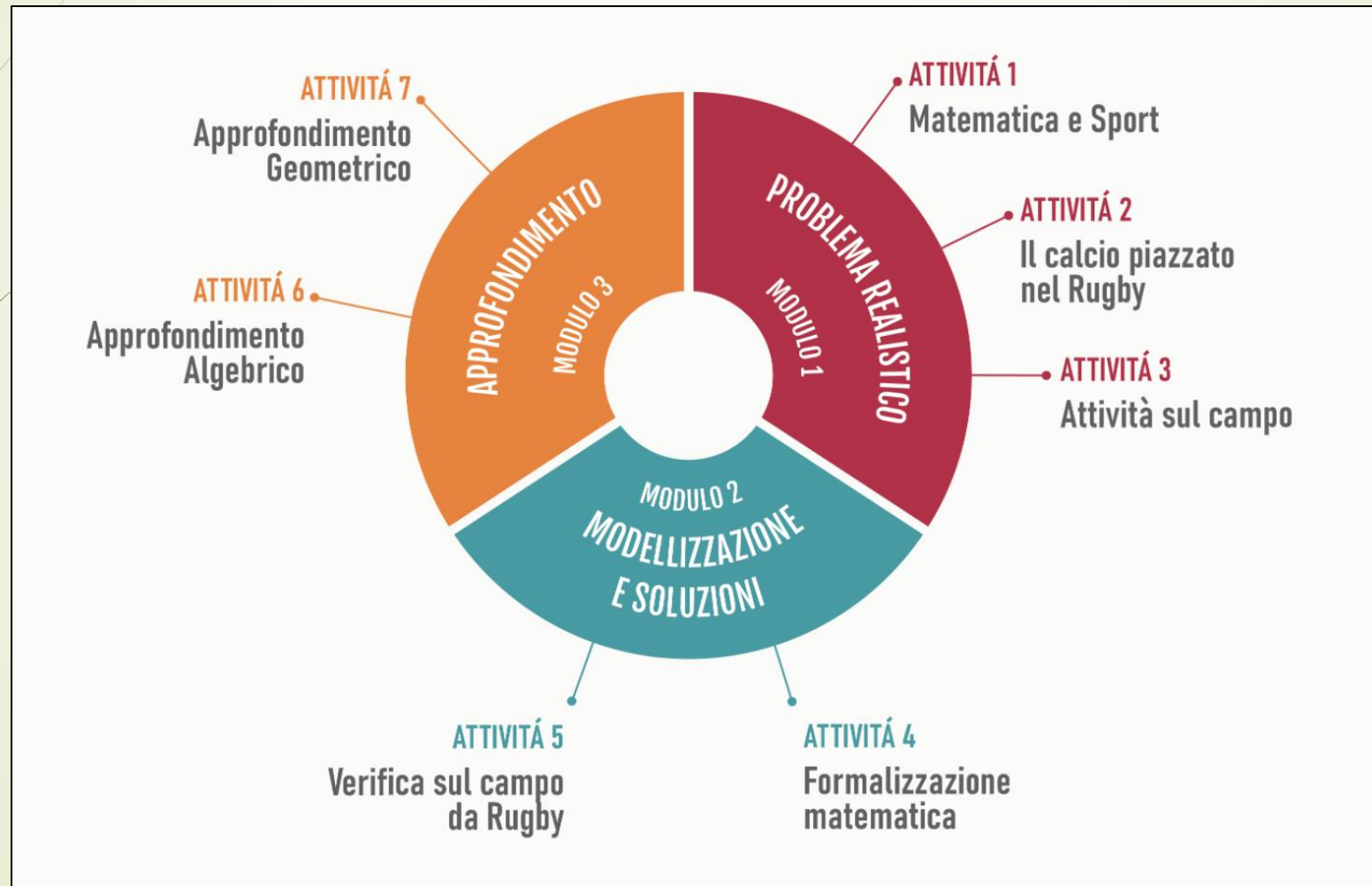
Qual è la distanza dalla linea di meta che massimizza l'angolo sotto cui si vede la porta?

Obiettivi:

- Riconoscere il concetto di **ottimo**
- Riconoscere la **variabile** e **funzione obiettivo**
- Risolvere un **problema di ottimizzazione**

Strumenti: derivate, coniche, trigonometria

Matematica e sport



Matematica e sport



Video e spunti per attivare la discussione

? DOMANDE PER ATTIVARE LA DISCUSSIONE

Queste sono alcune domande per stimolare ed indirizzare la discussione tra e con i tuoi studenti prevista nella pausa del video:

- Qual è la sequenza di azioni che il kicker fa quando calcia il calcio di trasformazione?
- Tenendo presente le azioni del kicker, quali fattori possono influenzare la riuscita o meno del calcio di trasformazione?
- La riuscita del calcio di trasformazione è influenzata solo dalle azioni compiute dal kicker o dipende anche da fattori non controllabili da quest'ultimo?

DESCRIVIAMO IL PROBLEMA

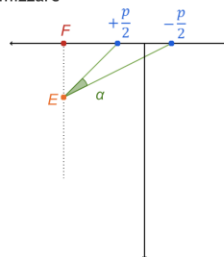


Iniziamo ad analizzare la situazione sul piano xOy :

- sull'asse x poniamo la porta (di ampiezza p), con il punto medio dei pali coincidente con l'origine degli assi
- in questo modo, anche il punto F di meta si trova sull'asse x
- il punto ottimale E da cui tirare la palla si trova sulla retta verticale passante per F
- l'angolo α con vertice in E è la quantità da massimizzare

Inoltre, osserviamo che:

- $\alpha = 0$ sulla linea del campo
- $\alpha \rightarrow 0$ se $y_E \rightarrow \infty$
- deve esistere un angolo ottimale "in mezzo"



IL MODELLO DI SOLUZIONE CON GEOGEBRA

Questo è un esempio di elaborato Geogebra che puoi utilizzare a supporto delle SLIDE 4 e 5.

[Scarica il File rugby1.ggb](#)

Slide e file di supporto


Cosa trovi nelle slide?

- SLIDE 1 - 3: Richiamo del problema realistico: "Trovare la distanza dalla linea di meta che massimizza l'angolo sotto cui si vede la porta".
- SLIDE 4 - 5: Esplorazione qualitativa del problema: studio della dipendenza dell'angolo sotto cui si vede la porta dalla distanza dalla linea di meta e dal punto di meta, utilizzando carta e penna oppure una costruzione in Geogebra, realizzata per quanto possibile in autonomia dagli studenti, seguendo il file rugby1.ggb.

Indicazioni metodologiche

Matematica e catalizzatori

MATEMATICA E CATALIZZATORI



Quale deve essere la lunghezza del catalizzatore affinché la concentrazione finale di inquinante sia inferiore alla concentrazione target, fissata dalle normative?

Obiettivi:

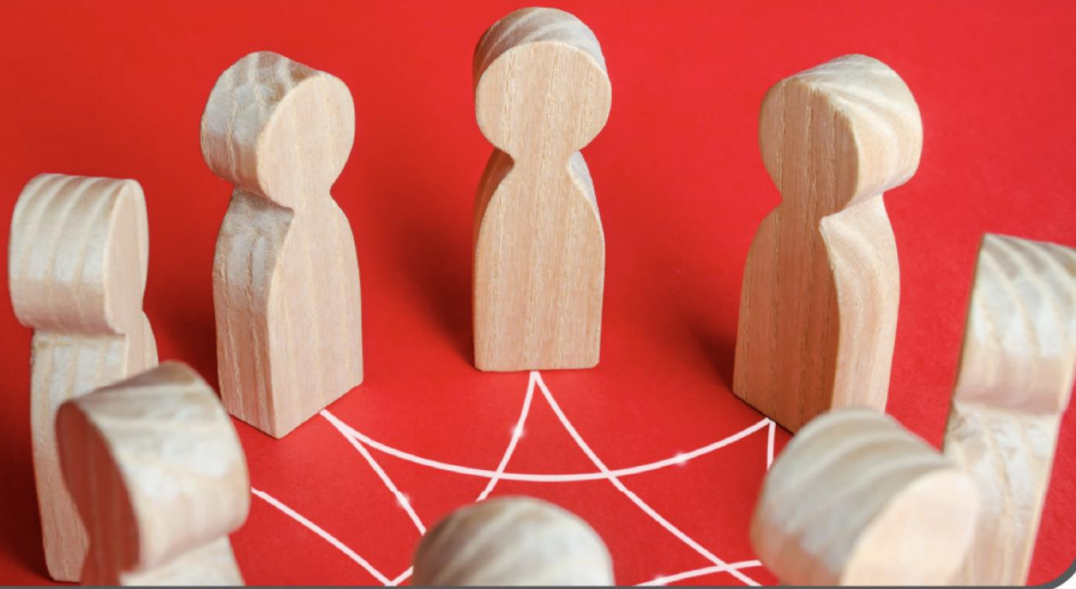
- Costruire un semplice modello discreto di un fenomeno regolato da un'equazione differenziale ordinaria
- Riconoscere la differenza tra modelli discreti e continui
- Comprendere e utilizzare alcuni costrutti di programmazione

Strumenti: funzioni esponenziali e logaritmiche, equazioni differenziali ordinarie

Matematica e social network

MATEMATICA E SOCIAL NETWORK

Qual è la classifica dei personaggi di Kung-Fu Panda in base alla loro importanza nella storia?



Obiettivi:

- Costruire il modello di una semplice situazione realistica usando le reti
- Costruire modelli di situazioni realistiche più complesse
- Utilizzare il software Gephi per l'analisi di reti complesse

Strumenti: matematica delle reti e relativi indici di centralità, matrici

Matematica per Scenari

MOOCs For Teachers



Polimi

MATEC101

Matematica per Scenari

www.pok.polimi.it

Seminari FDS 2022

Grazie per l'attenzione

Caterina Bassi

Laboratorio FDS – Dip. Matematica – Politecnico di Milano