Il problema isoperimetrico: da Didone alle bolle di sapone

effediesse
Laboratorio di Formazione
e
Sperimentazione Didattica
fds.mate.polimi.it

Marco Caroccia
Seminari EFFEDIESSE - Politecnico di Milano

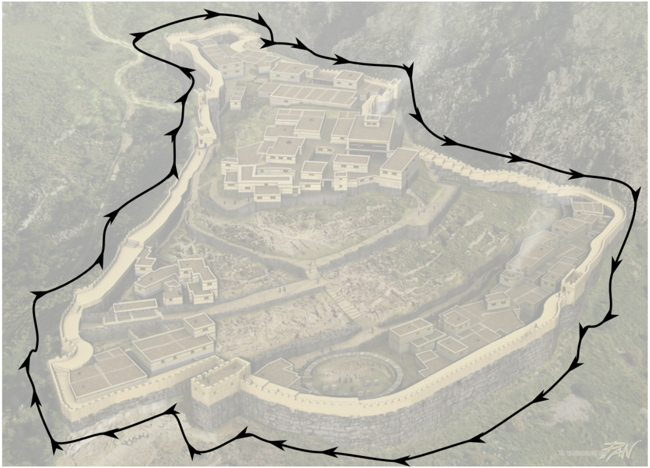
16 Novembre 2022
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Esploratori in viaggio

Ricostruzione Rocca di Micene 1200 a.c[1]

[1] *Illustrazione https://www.panaiotiskruklidis.com*

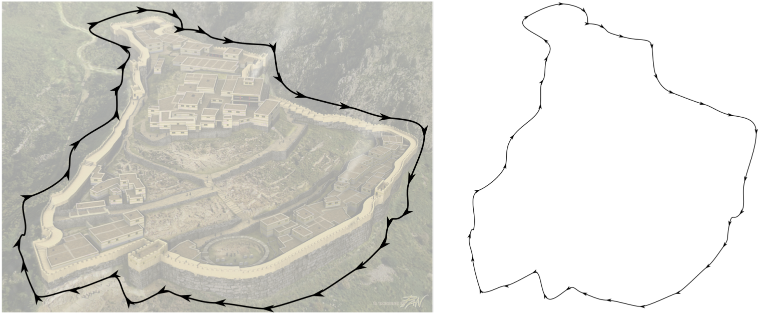
Esploratori in viaggio



Ricostruzione Rocca di Micene 1200 a.c[1]

[1] *Illustrazione https://www.panaiotiskruklidis.com*

Esploratori in viaggio



Ricostruzione Rocca di Micene 1200 a.c[1]

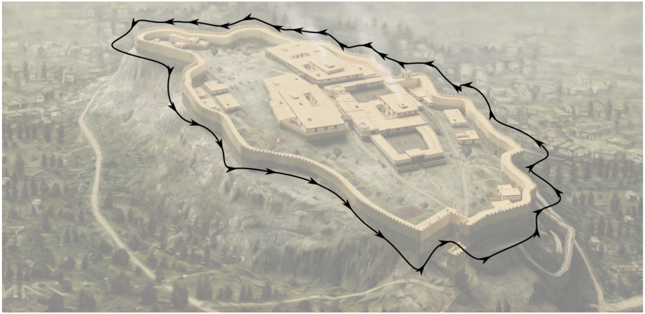
[1] *Illustrazione https://www.panaiotiskruklidis.com*

Esploratori in viaggio

Ricostruzione dell'acropoli di Atene 1200 a.c[2]

[2] *Illustrazione https://www.panaiotiskruklidis.com*

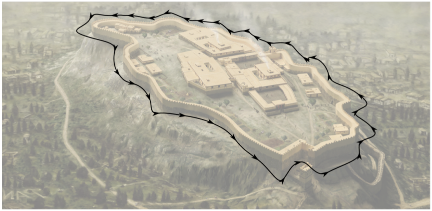
Esploratori in viaggio

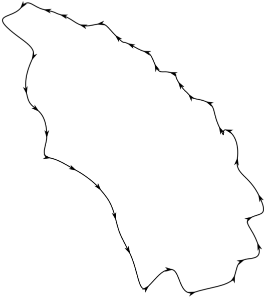


Ricostruzione dell'acropoli di Atene 1200 a.c[2]

[2] *Illustrazione https://www.panaiotiskruklidis.com*

Esploratori in viaggio



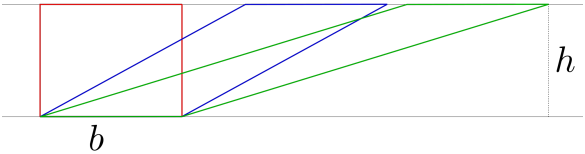


Ricostruzione dell'acropoli di Atene 1200 a.c[2]

[2] *Illustrazione https://www.panaiotiskruklidis.com*

Euclide

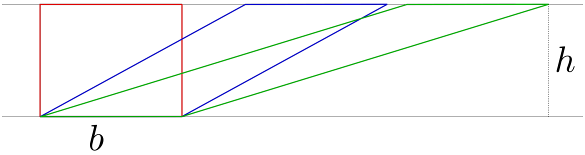
Euclide (III sec a.c.) - Prop 35, Teor 36: Parallelogrammi posti sulla stessa base e tra le stesse parallele sono uguali (in senso di area nda) tra loro.



$$\mathrm{Area}(\color{red}{P}) = \mathrm{Area}(\color{blue}{P}) = \mathrm{Area}(\color{green}{P}) = bh$$

EUCLIDE

Euclide (III sec a.c.) - Prop 35, Teor 36: Parallelogrammi posti sulla stessa base e tra le stesse parallele sono uguali (in senso di area nda) tra loro.



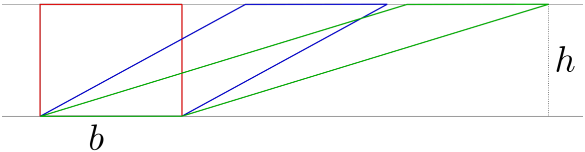
$$\text{Area}(P) = \text{Area}(P) = \text{Area}(P) = bh$$

PROCLO, COMMENTO A EUCLIDE- 400d.c.

Ma potrà sembrare del tutto strano, a chi è inesperto in questa scienza, che parallelogrammi posti sulla stessa base e fra le stesse parallele, siano fra loro eguali (in senso di area nda). Come infatti può essere, se la lunghezza dei lati fra le rette cresce all'infinito,..., che possa mantenersi l'equivalenza fra le aree si potrà richiedere con ragione. Che se la larghezza è la stessa, poiché la base è una sola, e la lunghezza è maggiore come non è maggiore anche l'area?

Euclide

Euclide (III sec a.c.) - Prop 35, Teor 36: Parallelogrammi posti sulla stessa base e tra le stesse parallele sono uguali (in senso di area nda) tra loro.



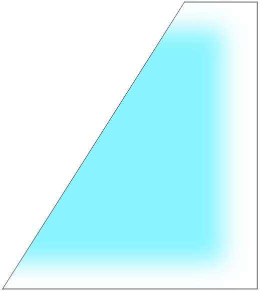
$$\text{Area}(P) = \text{Area}(P) = \text{Area}(P) = bh$$

PROCLO, COMMENTO A EUCLIDE - 400d.c.

...A un simile abbaglio vanno soggetti i coreografi quando calcolano le grandezze delle città dai perimetri. E già alcuni comproprietari di proprietà terriere hanno ingannato i loro compartecipi nella distribuzione approfittando della eccedenza di perimetro; ma accortisi poi che le aree rimaste ad altri pur di perimetro minore, erano più ampie, fecero il bel gesto di scambiare con quelli i terreni, ritraendone il buon nome di persone oneste e disinteressate.

Didone e la pelle di toro

Leggendaria fondazione di Cartagine IX sec. a.c.

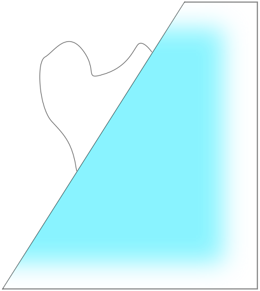


Poi giunsero nei luoghi dove adesso vedrai innalzarsi le mura gigantesche e la rocca della nuova Cartagine. Comprarono tanta terra quanta una pelle di toro potesse circondarne.

Eneide, Virgilio L. I, vv 422-426

Didone e la pelle di toro

Leggendaria fondazione di Cartagine IX sec. a.c.

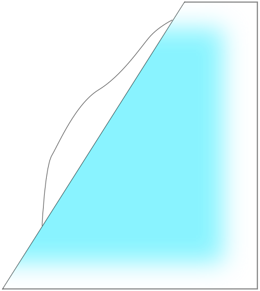


Poi giunsero nei luoghi dove adesso vedrai innalzarsi le mura gigantesche e la rocca della nuova Cartagine. Comprarono tanta terra quanta una pelle di toro potesse circondarne.

Eneide, Virgilio L. I, vv 422-426

Didone e la pelle di toro

Leggendaria fondazione di Cartagine IX sec. a.c.

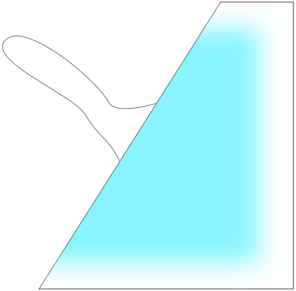


Poi giunsero nei luoghi dove adesso vedrai innalzarsi le mura gigantesche e la rocca della nuova Cartagine. Comprarono tanta terra quanta una pelle di toro potesse circondarne.

Eneide, Virgilio L. I, vv 422-426

DIDONE E LA PELLE DI TORO

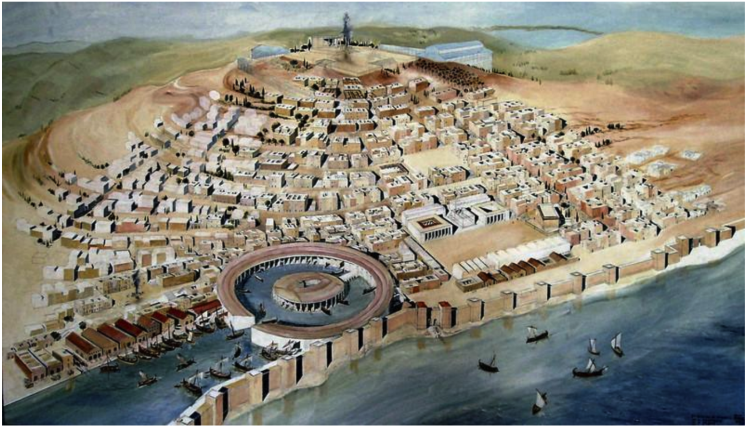
Leggendaria fondazione di Cartagine IX sec. a.c.



Poi giunsero nei luoghi dove adesso vedrai innalzarsi le mura gigantesche e la rocca della nuova Cartagine. Comprarono tanta terra quanta una pelle di toro potesse circondarne.

Eneide, Virgilio L. I, vv 422-426

Cartagine



Il problema di Didone e il problema isoperimetrico[3]

Problema di Didone
Data una corda di lunghezza fissata, determinare la forma che, quando congiunta con una retta, delimiti la più grande area possibile.

Problema isoperimetrico
Data una corda chiusa di lunghezza fissata, determinare la forma che delimiti la più grande area possibile.

[3] G. Di meglio - Il problema isoperimetrico;
Heath, Thomas Little. A history of Greek mathematics. Vol. 1 - Vol.2, Clarendon Press, 1921.

Il problema di Didone e il problema isoperimetrico[3]

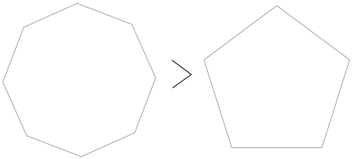
Problema di Didone
Data una corda di lunghezza fissata, determinare la forma che, quando congiunta con una retta, delimiti la più grande area possibile (fra tutte le altre forme).

Problema isoperimetrico
Data una corda chiusa di lunghezza fissata, determinare la forma che delimiti la più grande area possibile (fra tutte le altre forme).

[3] G. Di meglio - Il problema isoperimetrico;
Heath, Thomas Little. A history of Greek mathematics. Vol. 1 - Vol.2, Clarendon Press, 1921.

I teoremi di Zenodoro - II a.c [4]

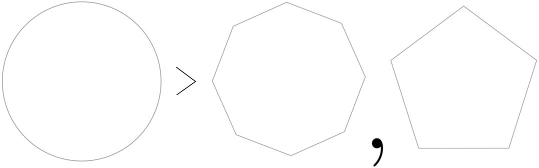
- Fra due poligoni regolari con ugual perimetro, quello con più lati ha un area maggiore.



[4]Leonardi, Gian Paolo, *Il mistero isoperimetrico di Zenodoro* (2015): 101-119.

I teoremi di Zenodoro - II a.C [4]

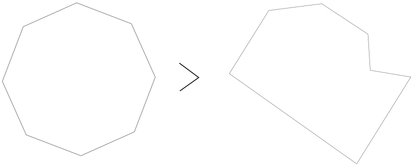
- Fra due poligoni regolari con ugual perimetro, quello con più lati ha un area maggiore.
- Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare di egual perimetro.



[4] Leonardi, Gian Paolo, *Il mistero isoperimetrico di Zenodoro* (2015): 101-119.

I teoremi di Zenodoro - II a.C [4]

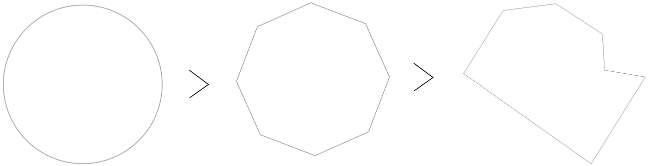
- Fra due poligoni regolari con ugual perimetro, quello con più lati ha un area maggiore.
- Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare di egual perimetro.
- Tra tutti i poligoni di ugual perimetro e numero di lati, quelli regolari (equilateri ed equiangoli) hanno area maggiore.



[4] Leonardi, Gian Paolo, *Il mistero isoperimetrico di Zenodoro* (2015): 101-119.

I teoremi di Zenodoro - II a.C [4]

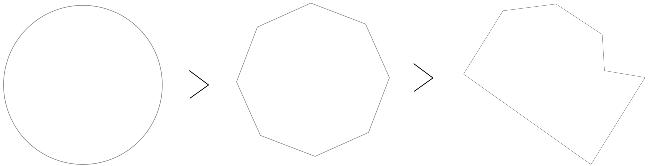
- Fra due poligoni regolari con ugual perimetro, quello con più lati ha un area maggiore.
- Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare di egual perimetro.
- Tra tutti i poligoni di ugual perimetro e numero di lati, quelli regolari (equilateri ed equiangoli) hanno area maggiore.
- Corollario: Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono con ugual perimetro.



[4] Leonardi, Gian Paolo, *Il mistero isoperimetrico di Zenodoro* (2015): 101-119.

I TEOREMI DI ZENODORO - II A.C [4]

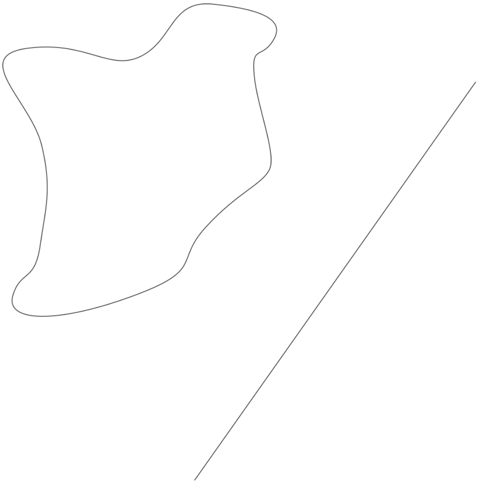
- Fra due poligoni regolari con ugual perimetro, quello con più lati ha un area maggiore.
- Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare di egual perimetro.
- Tra tutti i poligoni di ugual perimetro e numero di lati, quelli regolari (equilateri ed equiangoli) hanno area maggiore.
- Corollario: Un cerchio ha area maggiore di qualunque poligono con ugual perimetro.



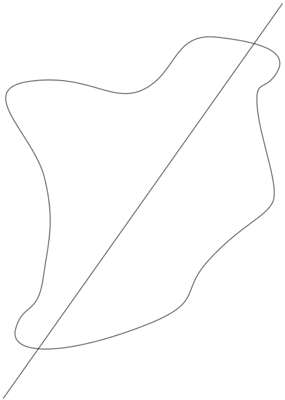
Congettura: *il cerchio ha area maggiore di qualunque altra figura di egual perimetro.*

[4] Leonardi, Gian Paolo, *Il mistero isoperimetrico di Zenodoro* (2015): 101-119.

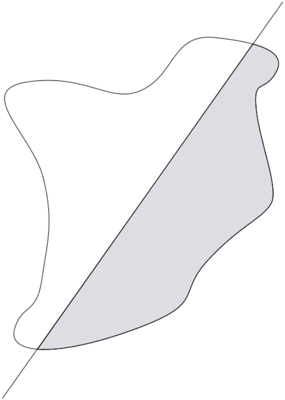
Simmetrizzazioni: una ricetta



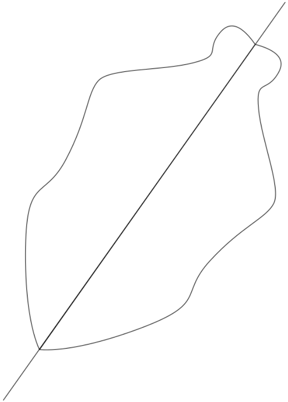
Simmetrizzazioni: una ricetta



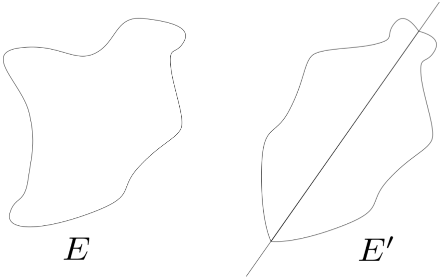
Simmetrizzazioni: una ricetta



Simmetrizzazioni: una ricetta



SIMMETRIZZAZIONI: UNA RICETTA



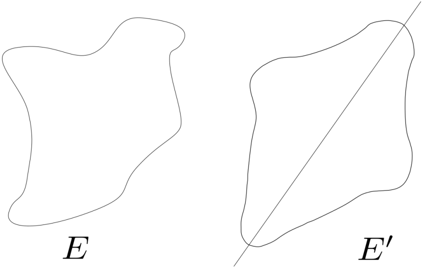
Abbiamo trovato un metodo costruttivo per fare la seguente cosa:

se E non è simmetrico rispetto a una direzione d allora produco E', simmetrico nella direzione d e tale che

$$A(E') \geq A(E), \;\; P(E') = P(E)$$

Simmetrizzazioni: la ricetta di Steiner

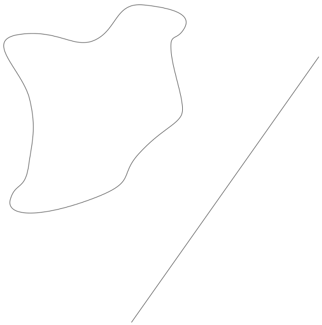
Io ho un metodo migliore!
J. Steiner (1796 - 1863)



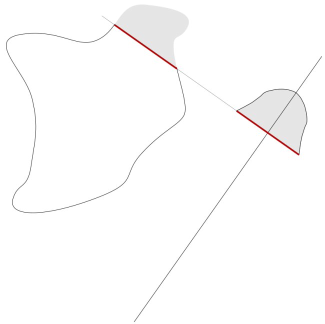
Se E non è simmetrico rispetto a una direzione allora produco E' tale che

$$A(E') > A(E), \;\; P(E') = P(E)$$

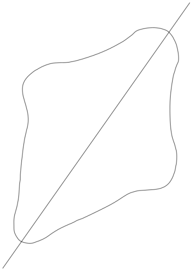
Steiner: chiediamo il VAR!



STEINER: CHIEDIAMO IL VAR!

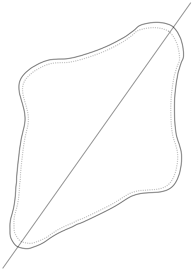


Steiner: chiediamo il VAR!



$$A(E') = A(E), \quad P(E') < P(E)$$

Steiner: chiediamo il VAR!



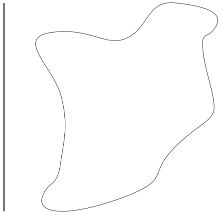
$$A(E') > ^5 A(E), \quad P(E') = P(E)$$

[5]Warning: l'argomento di Steiner è leggermente più involuto. La costruzione geometrica è quella qui riportata, tuttavia la disuguaglianza stretta vale solo su una classe particolare di insiem, i convessi, sufficiente a completare la dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica. A scopo di illustrarne il principio di funzionamento questo dettaglio è stata qui omesso. Si rimanda il lettore interessato in una prova completa alle referenze suggerite nel seguito oppure, per il lettore pronto a una trattazione più tecnica, al volume

Maggi, Francesco - *Sets of finite perimeter and geometric variational problems*, Capitolo 12 e 14, Cambridge University Press, 2012;

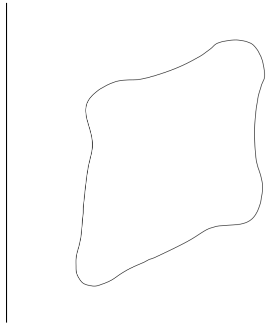
L'ARGOMENTO DI STEINER: UNA PROVA PER ASSURDO

- Sia E la figura di area massima a perimetro fissato P. Se E non è un cerchio allora ha un asse rispetto a cui NON è simmetrico;



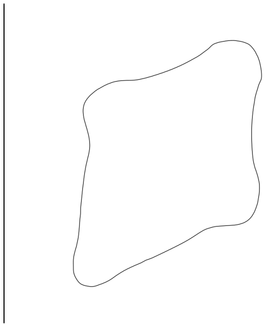
L'argomento di Steiner: una prova per assurdo

- Sia E la figura di area massima a perimetro fissato P. Se E non è un cerchio allora ha un asse rispetto a cui NON è simmetrico;
- Si trasformi E in E' con il metodo di Steiner



L'argomento di Steiner: una prova per assurdo

- Sia E la figura di area massima a perimetro fissato P. Se E non è un cerchio allora ha un asse rispetto a cui NON è simmetrico;
- Si trasformi E in E' con il metodo di Steiner
- La figura E' ottenuta adesso sarà simmetrica rispetto all'asse e $A(E') > A(E)$, $P(E') = P(E) = P$

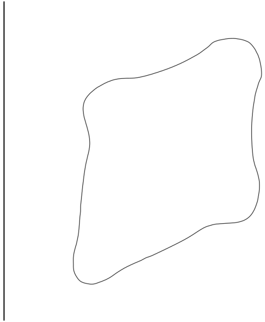


Ma E era la figura di area massima e dunque $A(E) \geq A(E')$. Allora

$$A(E) \geq A(E') > A(E) \quad \Rightarrow \quad A(E) > A(E)!$$

L'ARGOMENTO DI STEINER: UNA PROVA PER ASSURDO

- Sia E la figura di area massima a perimetro fissato P. Se E non è un cerchio allora ha un asse rispetto a cui NON è simmetrico;
- Si trasformi E in E' con il metodo di Steiner
- La figura E' ottenuta adesso sarà simmetrica rispetto all'asse e $A(E') > A(E)$, $P(E') = P(E) = P$



Ma E era la figura di area massima e dunque $A(E) \geq A(E')$. Allora

$$A(E) \geq A(E') > A(E) \;\; \Rightarrow \;\; A(E) > A(E)!$$

Pertanto, per evitare la contraddizione, deve essere falso l'assunto iniziale: *Se E non è un cerchio...*

CONCLUSIONE??

Dunque, se E è la figura di area massima fra tutte le figure con perimetro fissato P , allora è E è un cerchio.

CONCLUSIONE??

Dunque, se E è la figura di area massima fra tutte le figure con perimetro fissato P , allora è E è un cerchio.

PROBLEMA RISOLTO
Fine del seminario
Grazie dell'attenzione.

CONCLUSIONE??

Dunque, se E è la figura di area massima fra tutte le figure con perimetro fissato P , allora è E è un cerchio.

PROBLEMA RISOLTO
Fine del seminario
Grazie dell'attenzione.

O forse no?

Conclusione??

Dunque, se E è la figura di area massima fra tutte le figure con perimetro fissato P, allora è E è un cerchio.

PROBLEMA RISOLTO
Fine del seminario
Grazie dell'attenzione.

O forse no?

CONCLUSIONE??

Dunque, se E è la figura di area massima fra tutte le figure con perimetro fissato P, allora è E è un cerchio.

PROBLEMA RISOLTO
Fine del seminario
Grazie dell'attenzione.

O forse no?

Questo argomento dimostra che **SE** esiste una figura di area massima, fra tutte le figure con perimetro fissato P, allora deve necessariamente essere il cerchio.

UNA QUESTIONE DELICATA... L'ANALOGIA DI PERRON

La platea sarà concorde con le seguenti affermazioni

I) Se M è un numero allora M^2 è un numero;

II) Se M è un numero allora M^2 è maggiore o uguale di M, ($M^2 \geq M$);

III) Gli unici numeri uguali al loro stesso quadrato sono l'1 e lo 0 ($M^2 = M$ se e solo se $M = 1$ o $M = 0$).

Una questione delicata... L'analogia di Perron

La platea sarà concorde con le seguenti affermazioni

I) Se M è un numero allora M^2 è un numero;

II) Se M è un numero allora M^2 è maggiore o uguale di M, ($M^2 \geq M$);

III) Gli unici numeri uguali al loro stesso quadrato sono l'1 e lo 0 ($M^2 = M$ se e solo se $M = 1$ o $M = 0$).

- Sia N il numero più grande di tutti

Una questione delicata... L'analogia di Perron

La platea sarà concorde con le seguenti affermazioni

I) Se M è un numero allora M^2 è un numero;

II) Se M è un numero allora M^2 è maggiore o uguale di M, ($M^2 \geq M$);

III) Gli unici numeri uguali al loro stesso quadrato sono l'1 e lo 0 ($M^2 = M$ se e solo se $M = 1$ o $M = 0$).

- Sia N il numero più grande di tutti
- Considero N^2: allora N^2 è un numero (per l'affermazione I)

Una questione delicata... L'analogia di Perron

La platea sarà concorde con le seguenti affermazioni

I) Se M è un numero allora M^2 è un numero;

II) Se M è un numero allora M^2 è maggiore o uguale di M, ($M^2 \geq M$);

III) Gli unici numeri uguali al loro stesso quadrato sono l'1 e lo 0 ($M^2 = M$ se e solo se $M = 1$ o $M = 0$).

- Sia N il numero più grande di tutti
- Considero N^2: allora N^2 è un numero (per l'affermazione I)
- Poichè N è il numero più grande di tutti e N^2 è un numero dovrà valere che N^2 è più piccolo di N ($N^2 \leq N$)

UNA QUESTIONE DELICATA... L'ANALOGIA DI PERRON

La platea sarà concorde con le seguenti affermazioni

I) Se M è un numero allora M^2 è un numero;

II) Se M è un numero allora M^2 è maggiore o uguale di M, ($M^2 \geq M$);

III) Gli unici numeri uguali al loro stesso quadrato sono l'1 e lo 0 ($M^2 = M$ se e solo se $M = 1$ o $M = 0$).

- Sia N il numero più grande di tutti
- Considero N^2: allora N^2 è un numero (per l'affermazione I)
- Poichè N è il numero più grande di tutti e N^2 è un numero dovrà valere che N^2 è più piccolo di N ($N^2 \leq N$)
- D'altra parte, per l'affermazione II), $N^2 \geq N$;

Una questione delicata... L'analogia di Perron

La platea sarà concorde con le seguenti affermazioni

I) Se M è un numero allora M^2 è un numero;

II) Se M è un numero allora M^2 è maggiore o uguale di M, ($M^2 \geq M$);

III) Gli unici numeri uguali al loro stesso quadrato sono l'1 e lo 0 ($M^2 = M$ se e solo se $M = 1$ o $M = 0$).

- Sia N il numero più grande di tutti
- Considero N^2: allora N^2 è un numero (per l'affermazione I)
- Poichè N è il numero più grande di tutti e N^2 è un numero dovrà valere che N^2 è più piccolo di N ($N^2 \leq N$)
- D'altra parte, per l'affermazione II), $N^2 \geq N$;
- Dunque $N^2 = N$, e pertanto, per l'affermazione III): $N = 1$ oppure $N = 0$

UNA QUESTIONE DELICATA... L'ANALOGIA DI PERRON

La platea sarà concorde con le seguenti affermazioni

I) Se M è un numero allora M^2 è un numero;

II) Se M è un numero allora M^2 è maggiore o uguale di M, ($M^2 \geq M$);

III) Gli unici numeri uguali al loro stesso quadrato sono l'1 e lo 0 ($M^2 = M$ se e solo se $M = 1$ o $M = 0$).

- Sia N il numero più grande di tutti
- Considero N^2: allora N^2 è un numero (per l'affermazione I)
- Poichè N è il numero più grande di tutti e N^2 è un numero dovrà valere che N^2 è più piccolo di N ($N^2 \leq N$)
- D'altra parte, per l'affermazione II), $N^2 \geq N$;
- Dunque $N^2 = N$, e pertanto, per l'affermazione III): $N = 1$ oppure $N = 0$
- Poichè N è il numero più grande, e $0 < 1$ ne segue che il più grande numero naturale è 1

UNA QUESTIONE DELICATA... L'ANALOGIA DI PERRON (1913)

Steiner: *Fra tutte le figure di perimetro assegnato il cerchio racchiude la più grande area*

Per ogni figura E che NON sia un cerchio c'è una costruzione (la simmetrizzazione di Steiner) che produce una figura E' che racchiude un'area più grande di E. Dunque il cerchio ha area maggiore di tutti.

Perron: *Fra tutti i numeri, il numero 1 è il più grande di tutti*

Per ogni numero M che che NON sia il numero 1 c'è una costruzione (elevare al quadrato) che produce un numero M^2 più grande di M. Dunque 1 è il numero più grande di tutti.

UNA QUESTIONE DELICATA... L'ANALOGIA DI PERRON (1913)

Steiner: *Fra tutte le figure di perimetro assegnato il cerchio racchiude la più grande area*

Per ogni figura E che NON sia un cerchio c'è una costruzione (la simmetrizzazione di Steiner) che produce una figura E' che racchiude un'area più grande di E. Dunque il cerchio ha area maggiore di tutti.

Perron: *Fra tutti i numeri, il numero* 1 *è il più grande di tutti*

Per ogni numero M che che NON sia il numero 1 c'è una costruzione (elevare al quadrato) che produce un numero M^2 più grande di M. Dunque 1 è il numero più grande di tutti.

SE esiste la figura più grande di tutti (a perimetro fissato P), tale figura deve essere il cerchio.
SE esiste il numero più grande di tutti, tale numero deve essere 1.

Esistenza

Teorema(1879)[a]: *Fissato il perimetro P esiste sempre una figura di area massima, fra tutte quelle di perimetro assegnato P.*
K. Weierstrass (1815 - 1897)

[a] Weierstress - K. Weierstrass, Mathematische Werke, vol. 7, Mayer & Ṁuller, Berlin, 192

Ora il mio argomento è sufficiente a concludere!
J. Steiner (1796 - 1863)

Questa si può ritenere la prima dimostrazione completa della massimalità del cerchio nel problema isoperimetrico (e del semicerchio nel problema di Didone)[6]

$P(E)^2 \geq 4\pi A(E)$ per tutte le figure E, con uguaglianza se e solo se E è un cerchio

[6] Moltissimi contributi: Bonnesen, Edler, Caratheodory, De Giorgi (1959), Gromov, Figalli, Maggi, Pratelli, Fusco.
Fusco - The classical isoperimetric theorem;
De Viktor Blåsjö - The Isoperimetric Problem, The American Mathematical Monthly, 112:6, 526-566, DOI: 10.1080/00029890.2005.11920227

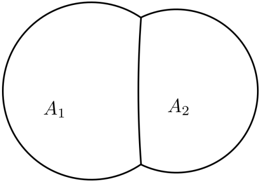
Come si fa?

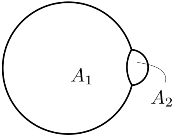
Wierstrass per funzioni: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo.*

IDEA in brevissimo: $A : \{E, \text{ figure di perimetro fissato P}\} \to \mathbb{R}$. Voglio usare lo stesso principio. A è una funzione continua e $\{E, \text{ figure di perimetro fissatoE}\}$ è come un intervallo chiuso e limitato! Allora A ammette un massimo, cioè esiste una figura che realizza lamassima area fra quelle di perimetro fissato P!

Problemi multicamera, aka bolle di sapone

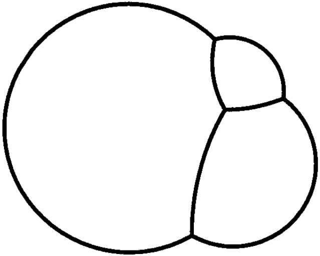
Qual'è la forma migliore per racchiudere due regioni di area assegnata A_1 e A_2 con il minimo possibile di contorno ?





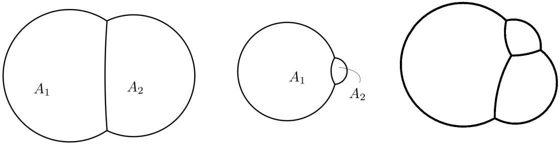
Problemi multicamera, aka bolle di sapone

Qual'è la forma migliore per racchiudere tre regioni di area assegnata A_1,A_2 e A_3 con il minimo possibile di contorno ?



Problemi multicamera, aka bolle di sapone

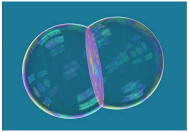
Qual'è la forma migliore per racchiudere due e tre regioni di area assegnata con il minimo possibile di contorno ?



Il problema bidimensionale è aperto per ogni numero di camere maggiore o uguale a 4.

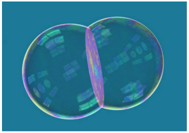
Problemi multicamera, aka bolle di sapone

Qual'è la forma migliore per racchiudere due e tre regioni di area assegnata con il minimo possibile di contorno in tre dimensioni?



PROBLEMI MULTICAMERA, AKA BOLLE DI SAPONE

Qual'è la forma migliore per racchiudere due e tre regioni di area assegnata con il minimo possibile di contorno in tre dimensioni?



Il problema tridimensionale è aperto per ogni numero di camere maggiore o uguale a 4.

Milmann, Neeman - Giugno 2022[7]: Soluzione del caso a 3 camere in dimensione 3 e superiore e 4 camere in dimensione 4 e superiore.

[7] Milman, Emanuel, and Joe Neeman. "The Structure of Isoperimetric Bubbles on $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{S}^n$." arXiv preprint arXiv:2205.09102

Grazie dell'attenzione