Sorgenti e sviluppi di un calcolo infinitesimale senza infinitesimi

Una nuova proposta didattica

La nostra nuova proposta didattica **consiste nell'anteporre la nozione di derivata a quella di limite** invertendo un ordine di priorità reso quasi scontato da una lunga, consolidata tradizione tanto dell'insegnamento secondario superiore quanto di quello universitario.

Origine e motivazioni della nostra proposta

- Il calcolo infinitesimale in origine era fondato su una nozione euristica, rimasta per lungo tempo imprecisata e controversa: quella di **infinitesimo**.

- Celebre il sarcastico giudizio di George Berkeley, per il quale gli infinitesimi altro non sono che

“fantasmi di quantità scomparse”

- Di quei fantasmi il calcolo infinitesimale poté liberarsi soltanto cent’anni dopo la nascita, con *l’aritmetizzazione dell'analisi* intrapresa da Karl Weierstrass e fondata sulla nozione di **limite**.

- Ma come tutte le grandi conquiste anche quella del limite ebbe *- come ha tuttora -* un prezzo da pagare, per il complesso bagaglio insiemistico topologico che quel concetto porta con sè.

- Recenti studi in *Didattica della Matematica* hanno mostrato che quello di limite è “**uno dei concetti più diabolicamente complicati della matematica”.**

- Le difficoltà che incontrano gli studenti nell'apprendimento di questa nozione viene fatta risalire alla *contemporanea presenza*, nella sua definizione, di due aspetti dell’infinito da sempre in competizione fra loro: **l’infinito attuale e l’infinito potenziale.**

- Una via più agevole di quella seguita da Weierstarass consiste nel **restringere** dapprima la classe delle funzioni per le quali costruire il calcolo differenziale per trarre poi da questa costruzione gli spunti essenziali per la sua estensione a “tutte” le altre funzioni.

- Lo spunto iniziale è il seguente: risalendo alle sorgenti del calcolo infinitesimale e a una delle sue idee fondanti, quella contenuta nel **metodo di Fermat** *per la determinazione dei massimi e dei minimi delle funzioni reali di variabile reale*.

- Si scopre l'esistenza di due notevoli classi di funzioni, quella dei **polinomi** e quella delle **funzioni convesse**, che il calcolo infinitesimale lo portano nei genomi, un calcolo che non richiede infinitesimi nè limiti, *del tutto libero da “fantasmi”.*

- Un calcolo che potrebbe dirsi **algebrico-geometrico** col quale si risolvono classici problemi di massimo e di minimo posti dalla **teoria degli isoperimetri, dall’ottica geometrica e dalle disuguaglianze di convessità.**

Guidati dalle precedenti considerazioni, presenteremo

a) i classici problemi **isoperimetrici** delle figure geometriche piane, mostrando il loro stretto legame col fenomeno della **riflessione.** Mostreremo come questi conducano a problemi di **massimo e di minimo per funzioni polinomiali;**

b) il ruolo cruciale delle **funzioni convesse** nei problemi di **minimo** dell' ottica geometrica, e nella teoria delle disuguaglianze.

Svilupperemo poi il nostro **calcolo infinitesimale senza infinitesimi - nè limiti -** per i polinomi e per le funzioni convesse: calcolo differenziale **algebrico** per i primi, calcolo differenziale **geometrico** per le seconde.

Emergerà con chiarezza quello che sosteneva Dedekind:

*il calcolo infinitesimale si fonda sulla **continuità***

tanto della retta reale, quanto delle funzioni reali di variabile reale, nozioni entrambe **indipendenti da quella di limite**.

Concludiamo questa premessa sottolineando una motivazione aggiuntiva alla nostra proposta: s*viluppare il "calcolo sublime" dapprima per **la piu' semplice classe di funzioni** - quella dei polinomi - consente una più adeguata **gradualità didattica** nell'insegnamento dell'analisi matematica, ad ogni livello.*

Christian Facchini • Ermanno Lanconelli

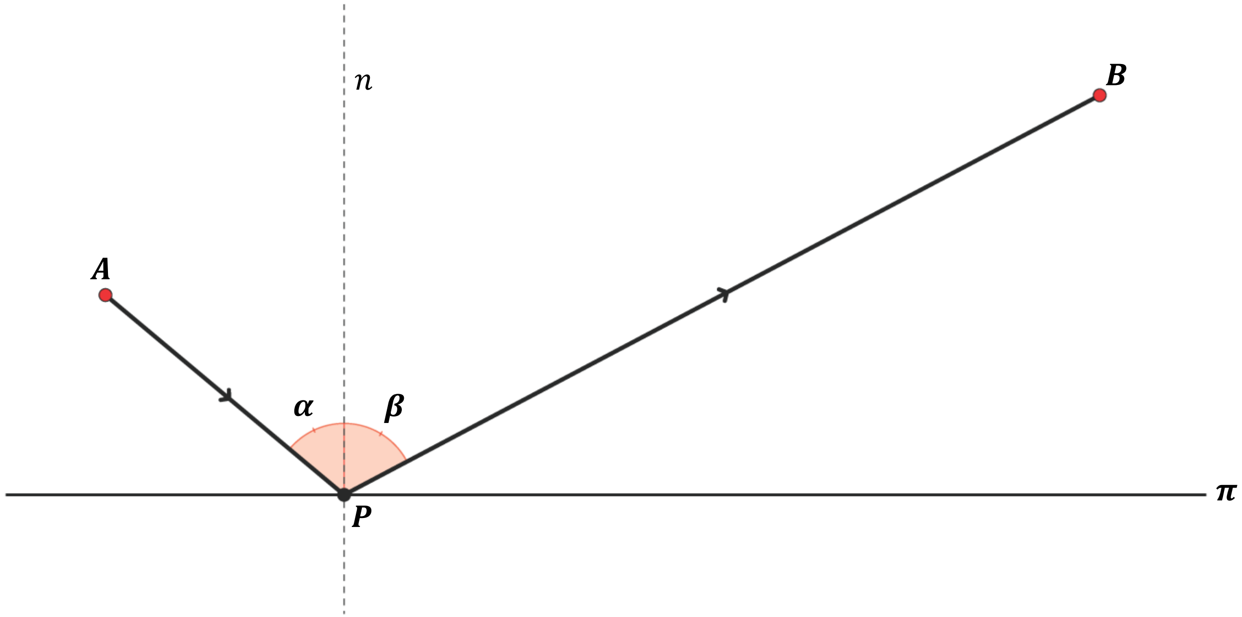
Un cammino tra massimi e minimi: ciottoli e sorgive di calcolo infinitesimale

Raggi luminosi. Isoperimetri.
Disuguaglianze geometriche.
Polinomi e funzioni convesse:
un calcolo infinitesimale senza infinitesimi.

Pitagora Editrice Bologna

Sorgente

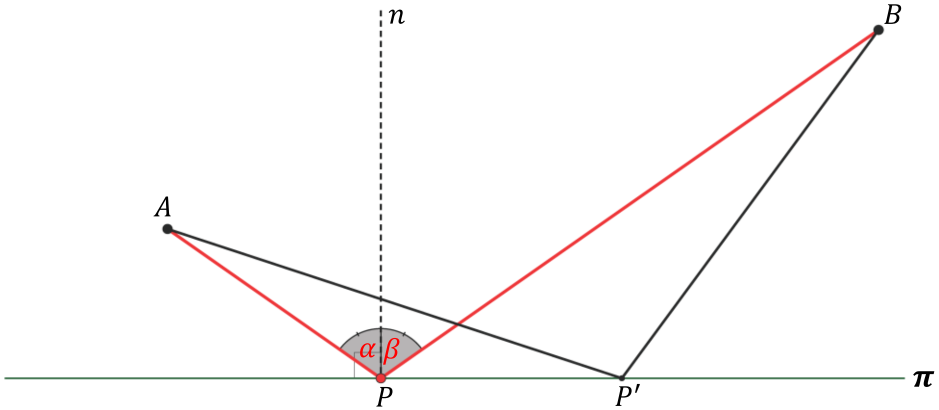
Un raggio di luce esce da un punto A, colpisce uno specchio piano π in un punto P e viene riflesso verso un punto B.



$$(\boldsymbol{LR}) \quad \boldsymbol{\alpha} \cong \boldsymbol{\beta}$$ Legge di riflessione

Teorema di Erone

La lunghezza della poligonale $AP + PB$, *traiettoria del raggio luminoso*, è minima fra le lunghezze delle poligonali $AP' + P'B$ con $P' \in \pi$.



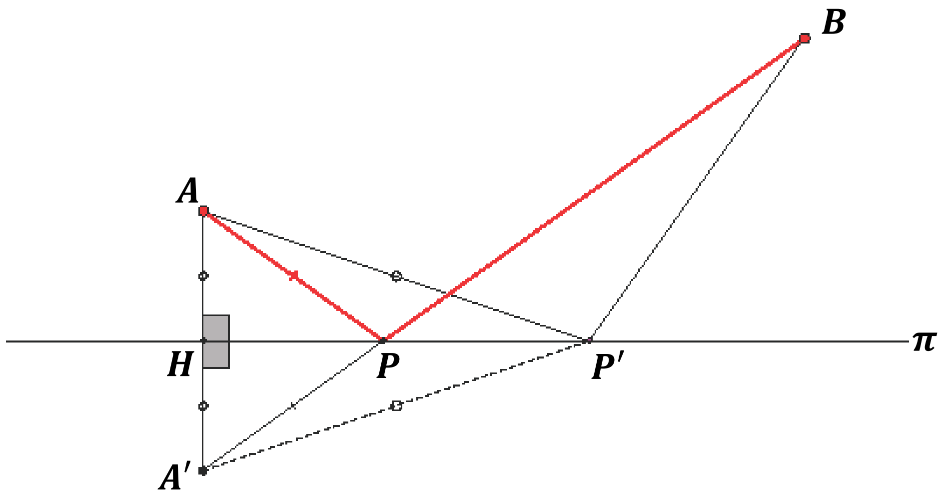
$$\alpha \cong \beta \Leftrightarrow \overline{AP} + \overline{PB} \leq \overline{AP'} + \overline{P'B} \text{ per ogni } P' \in \pi$$

Quindi

$$(\boldsymbol{LR}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{PM})$$

Dimostrazione del Teorema di Erone

- La costruzione di Erone

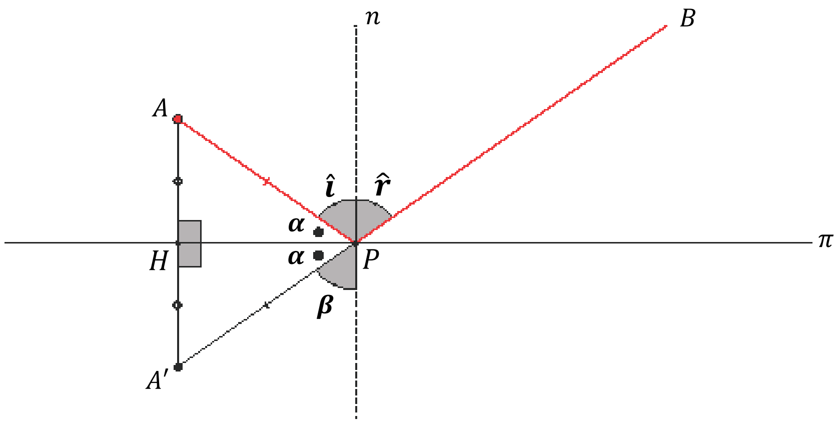


$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} = \overline{A'B} < (se\ P' \neq P, per\ la\ disuguaglianza\ triangolare)\ \ \overline{A'P'} + \overline{P'B} = \overline{AP'} + \overline{P'B}$$

e quindi

$$\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AP'} + \overline{P'B}$$

- Il percorso di Erone rispetta la legge di riflessione



$\hat{\imath}$ = angolo di incidenza

$\hat{r}$ = angolo di riflessione

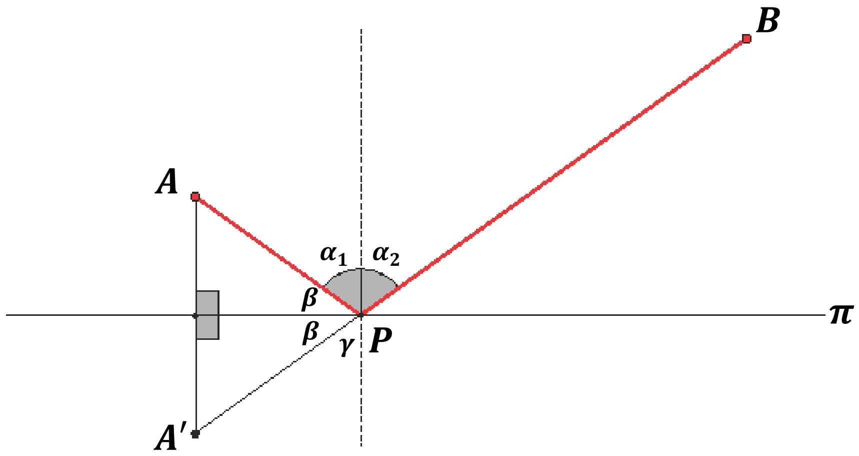
- $\hat{\imath} \cong \beta$ perché entrambi complementari di α
- $\beta \cong \hat{r}$ perché opposti al vertice

Quindi $\hat{\imath} = \hat{r}$.

Abbiamo così dimostrato che il principio di minimo percorso implica la legge di riflessione, ovvero

$$\boldsymbol{(PM) \Longrightarrow (LR)}$$

Mostriamo ora che $(\boldsymbol{LR}) \Longrightarrow (\boldsymbol{PM})$.



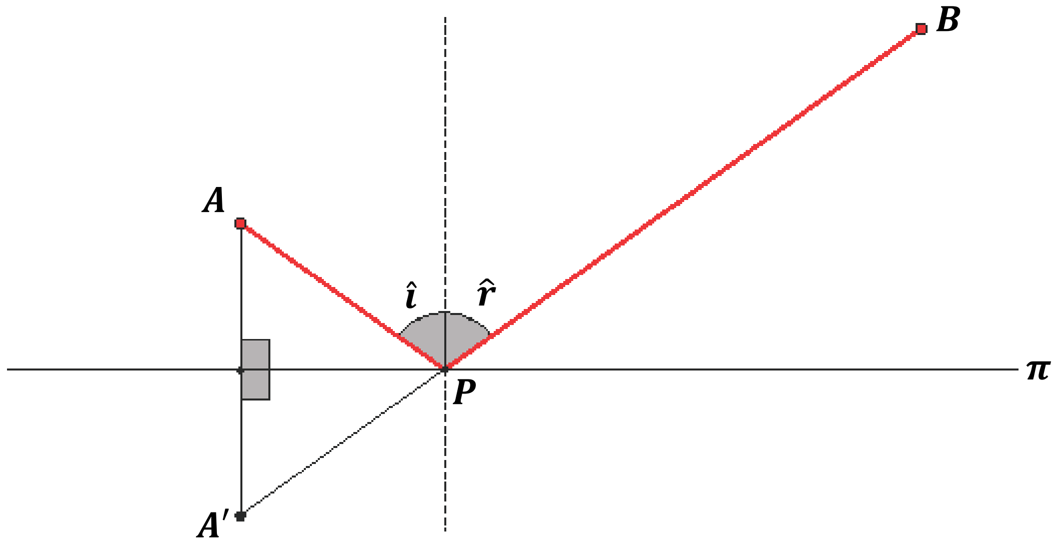
Il percorso $AP + PB$ rispetta la legge di riflessione. Il punto A' è il simmetrico di A rispetto al piano π.

- $\gamma \cong \alpha_1 \cong \alpha_2$ perché entrambi complementari a β
- $\alpha_1 + 2\beta + \gamma \cong \pi$
- $\alpha_1 + 2\beta + \alpha_2 \cong \pi$

Quindi A', P, B sono punti allineati: pertanto $A'B$ è un segmento di retta e $AP + PB$ è il percorso di Erone, *dunque il percorso minimo*. Pertanto

$$(\boldsymbol{LR}) \Longrightarrow (\boldsymbol{PM})$$

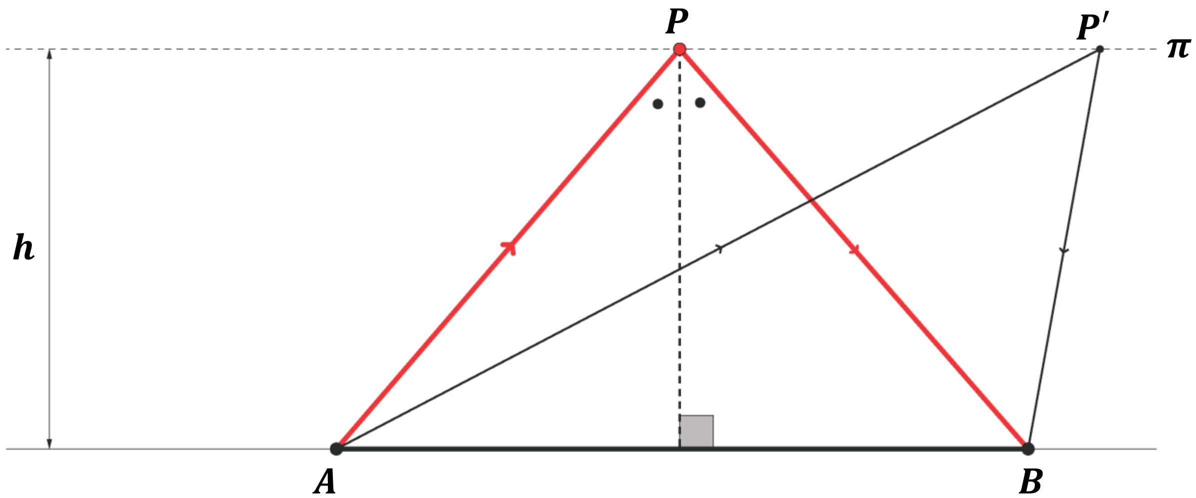
Abbiamo mostrato che



$$(\boldsymbol{LR}) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{PM})$$

Conseguenze *geometriche* di Erone

Fra tutti i triangoli di *lato fissato* AB *e data area,* quello isoscele ha perimetro minimo.



- $AP + PB$ è traiettoria luminosa perché rispetta (PR)

Quindi ha lunghezza minima, pertanto

$$\boldsymbol{p(APB) \leq p(ABP')}$$

Problema duale: *proprietà isoperimetrica dei triangoli isosceli*

Fra tutti i triangoli *di lato fissato AB e assegnato perimetro* quello isoscele ha area massima.

Prima dimostrazione: argomento "astratto". Sia T un triangolo di base AB e perimetro p. Siano poi

- T_0 il triangolo isoscele di base AB tale che $a(T_0) = a(T)$. Allora (Erone): $p(T_0) \leq p(T)$.
- T_1 il triangolo isoscele di base AB tale che $p(T_1) = p(T)$.

Siano h_0 e h_1 le altezze rispettivamente di T_0 e T_1.

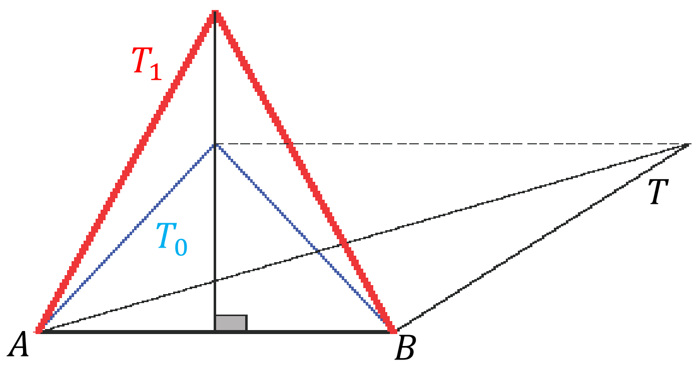
Allora

$p(T_1) = p(T) \geq p(T_0)$, ovvero

$p(T_1) \geq p(T_0)$.

Allora $h_1 \geq h_0$, dunque $a(T_1) \geq a(T_0) = a(T)$.

Quindi $p(T_1) = p(T), a(T_1) \geq a(T)$.

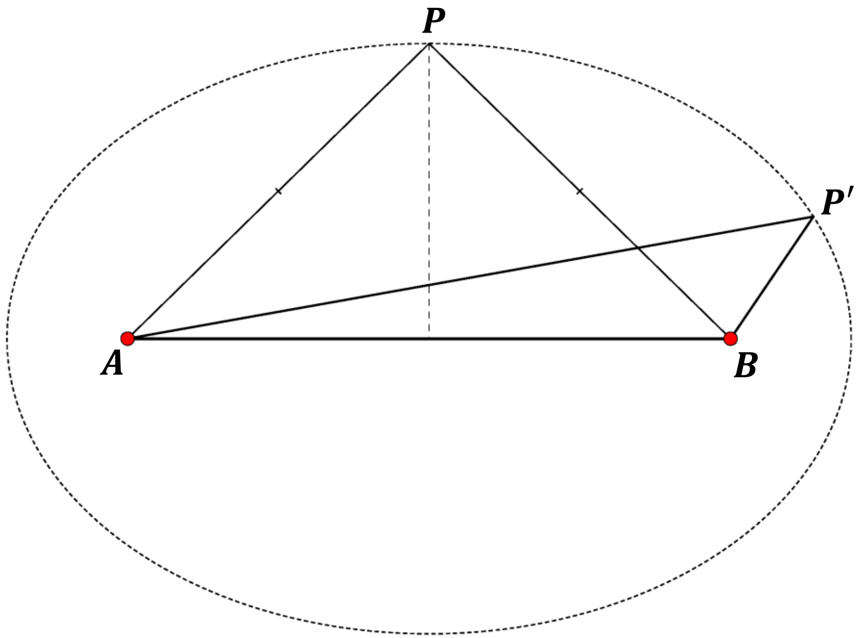


Conclusione

Dato un triangolo qualunque T di base AB, abbiamo trovato il triangolo isoscele T_1 su AB, con lo stesso perimetro e base maggiore o ugale all'area di T.

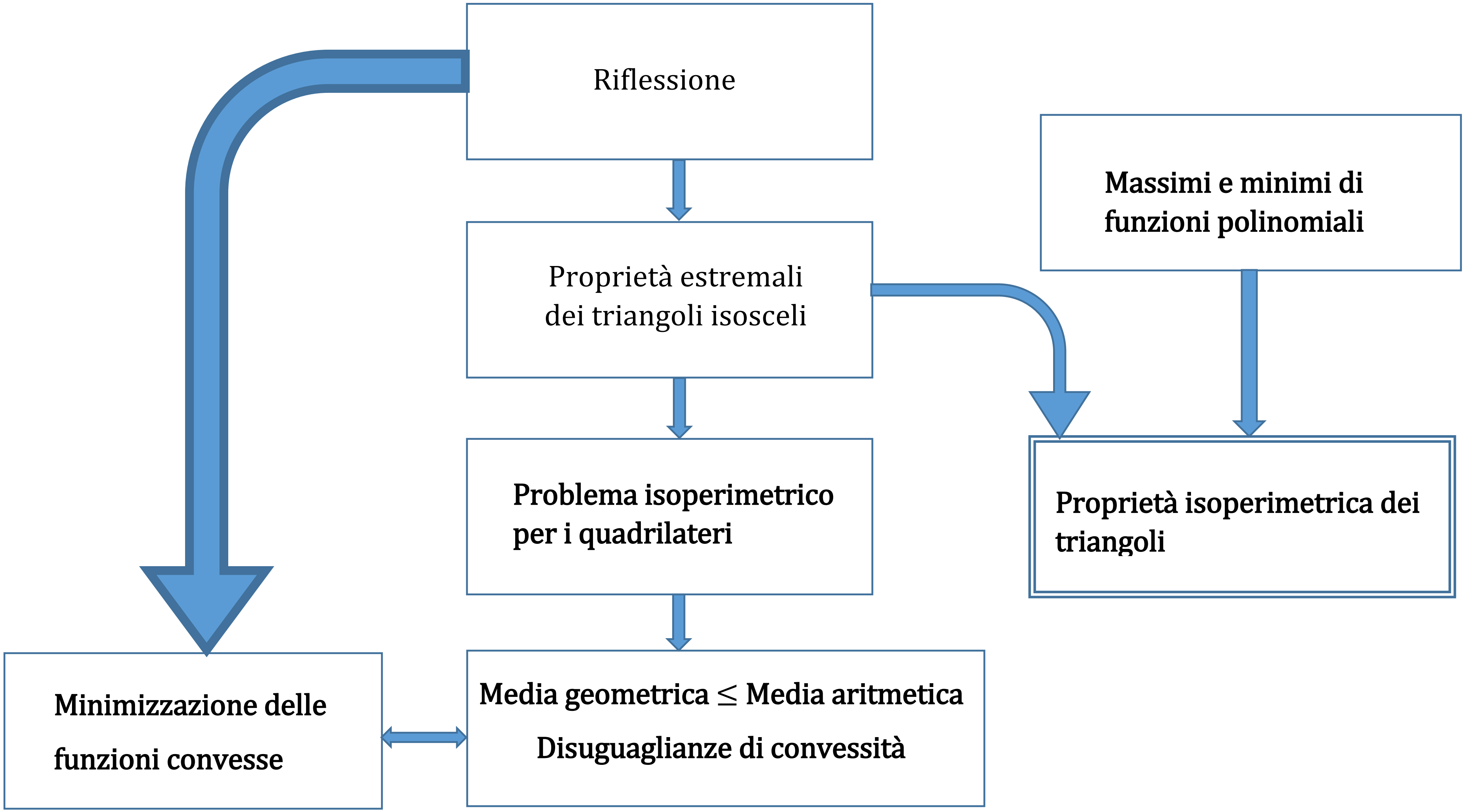
Seconda dimostrazione: argomento geometrico.

I vertici di tutti i triangoli di base AB e assegnato perimetro stanno su una ellisse avente i fuochi in A e in B.



$\overline{AP} + \overline{PB} = \text{costante}$

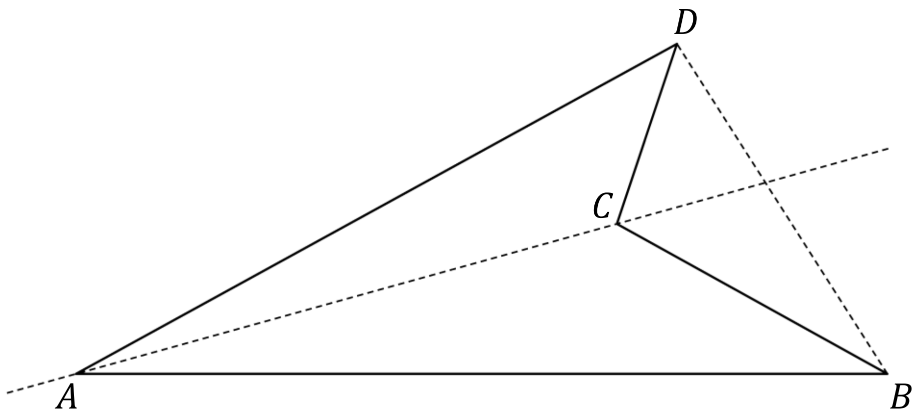
Naturali ramificazioni del cammino



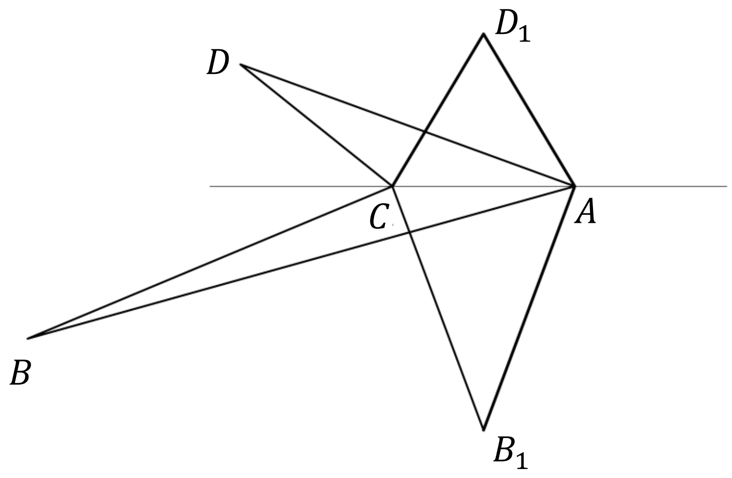
Problema isoperimetrico per i quadrilateri

Fra tutti i quadrilateri di assegnato perimetro *il quadrato*, e solo il quadrato, *ha area massima.*

- Sia $Q = ABCD$ un qualsiasi quadrilatero e AC una sua diagonale propria.



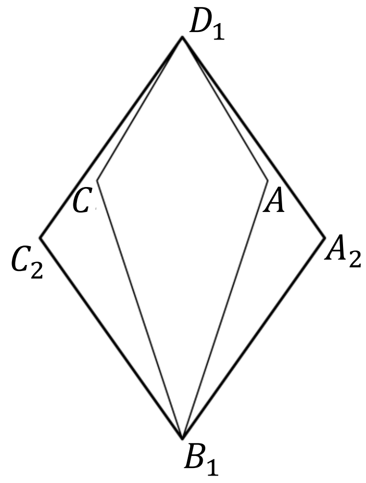
- Modifichiamo i triangoli CAB e CDA *usando la proprietà isoperimetrica dei triangoli isosceli*



$$Q_1 = AB_1CD_1$$

$$p(Q_1) = p(Q)$$
$$a(Q_1) \geq a(Q)$$

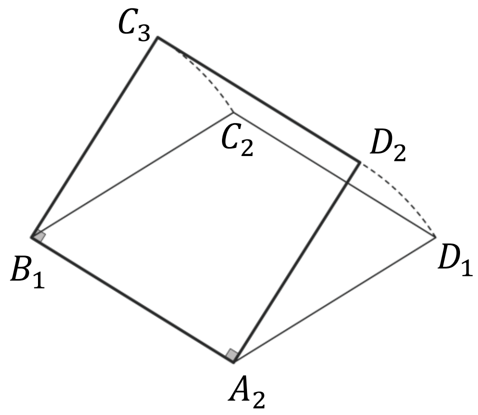
- Modifichiamo Q_1



$$Q_2 = A_2B_1C_2D_1$$

$$p(Q_2) = p(Q_1) = p(Q)$$
$$a(Q_2) \geq a(Q_1) \geq a(Q)$$

- Modifichiamo Q_2



$Q_3 = A_2B_1C_3D_2$

$p(Q_3) = p(Q_2) = p(Q)$

$a(Q_3) \geq a(Q_2) \geq a(Q)$

- **Q_3 è un quadrato**

  a) $p(Q_3) = p(Q)$

  b) $a(Q_3) \geq a(Q)$ e vale $>$ se Q non è un quadrato

In definitiva, abbiamo mostrato che dato un qualunque quadrilatero, esiste ed è unico – a meno di congruenze – il quadrato con lo stesso perimetro e area massima.

Disuguaglianza isoperimetrica per i quadrilateri

Se Q è un quadrilatero allora

$$a(Q) \leq \frac{1}{16}\big(p(Q)\big)^2$$

e vale l'uguaglianza se e solo se Q è un quadrato.

Dimostrazione. Sia Q^* il quadrato tale che

$$p(Q^*) = p(Q) \ \text{ e } \ a(Q^*) \geq a(Q)$$

con $a(Q^*) > a(Q)$ se Q non è un quadrato.

Allora, poiché

$$a(Q^*) = \left(\frac{p(Q^*)}{4}\right)^2$$

si ha

$$a(Q) \leq a(Q^*) = \frac{1}{16}\big(p(Q^*)\big)^2 = \frac{1}{16}\big(p(Q)\big)^2$$

Proprietà duale di quella isoperimetrica dei quadrati

Fra tutti i *quadrilateri di area assegnata* il quadrato, e solo il quadrato, *ha perimetro minimo.*

Questo risultato si dimostra facilmente usando la disuguaglianza isoperimetrica.

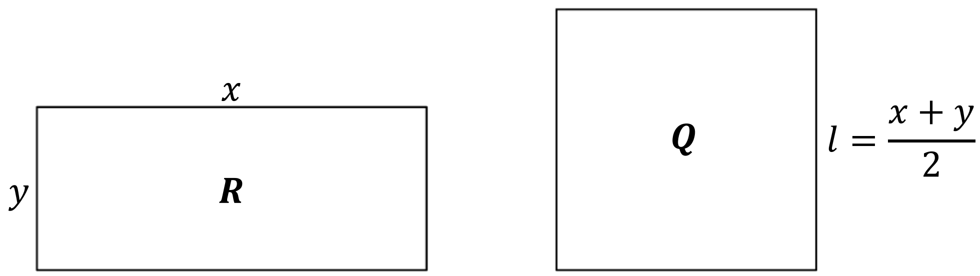
Indichiamo con Q quadrilatero qualunque e Q^* il quadrato tale che $a(Q^*) = a(Q)$.

$$\left(p(Q^*)\right)^2 = 16a(Q^*) = 16a(Q) \leq \left(p(Q)\right)^2$$

Dalla proprietà isoperimetrica dei quadrilateri alla disuguaglianza

$$\boldsymbol{G \leq A}$$

Fra tutti i rettangoli *di assegnato perimetro* il quadrato, e solo il quadrato, *ha area massima.*



$$a(R) = xy \leq a(Q) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow G(x,y) \leq A(x,y)$$

Vale $= \Leftrightarrow R = Q \Leftrightarrow x = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y$.

Dimostrazione analitica di $G \leq A$.

$$G(x,y) \leq A(x,y) \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy}\right)^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$xy \leq \frac{x^2+y^2+2xy}{4} \Leftrightarrow 4xy \leq x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow$$

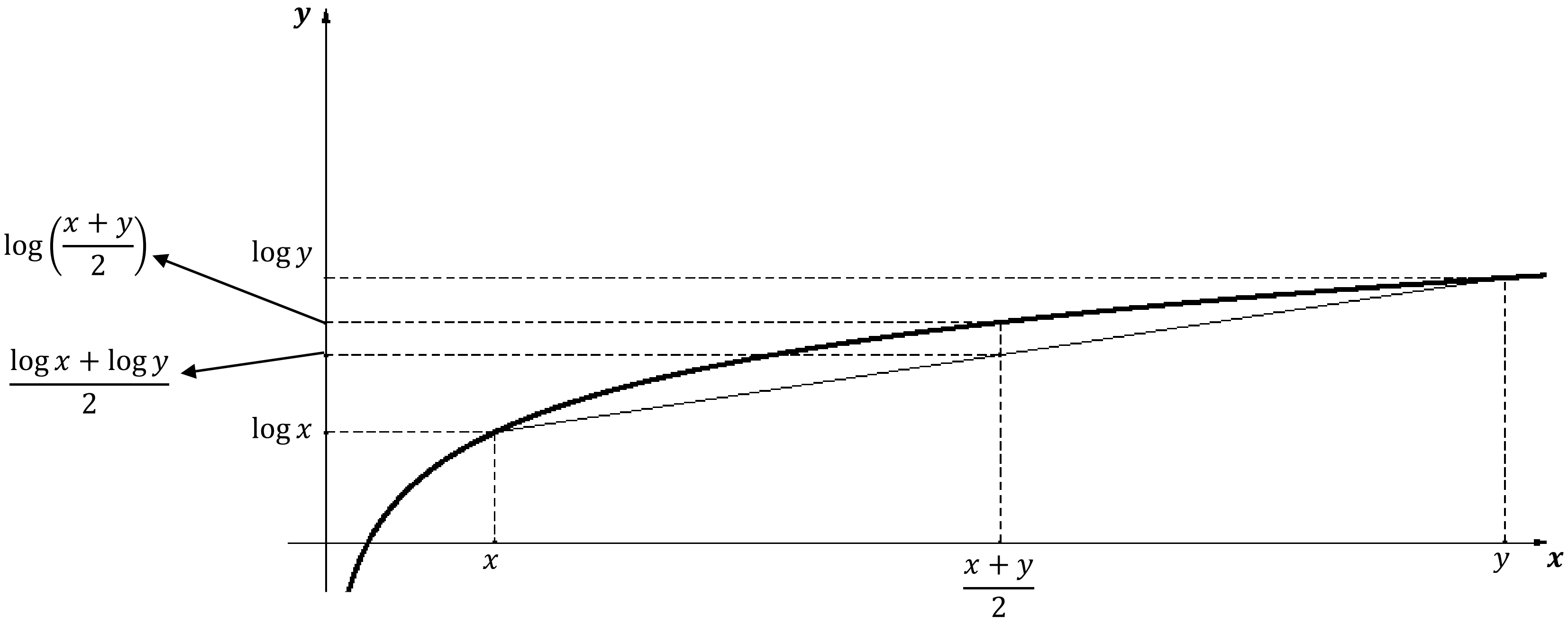
$$0 \leq x^2+y^2-2xy \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$$

Inoltre vale $=$ se e solo se $x = y$.

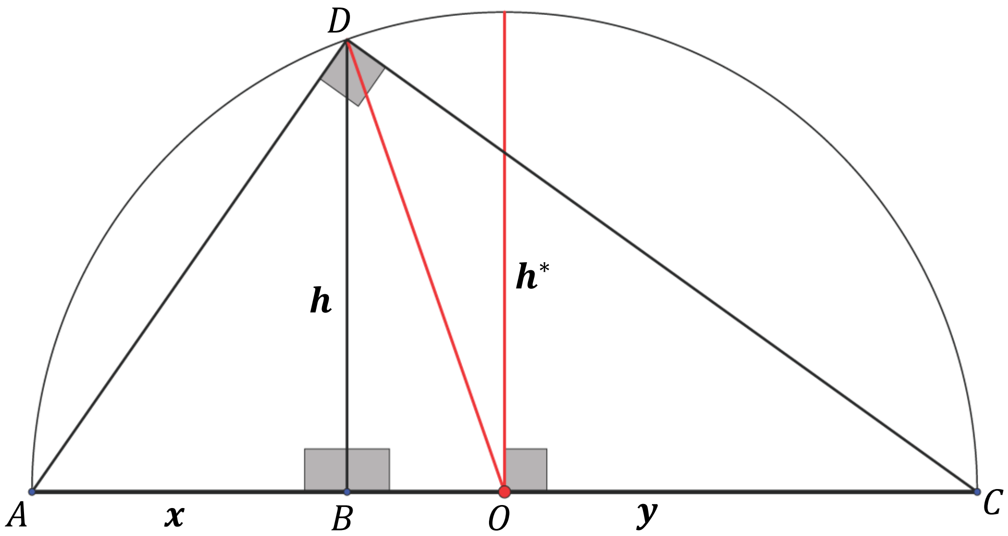
$G \leq A \Leftrightarrow$ log è concava

Siano $x, y > 0$.

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log(xy) \leq \log\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\log x + \log y}{2} \leq \log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$



$$\boldsymbol{G \leq A \Leftrightarrow \; II\ Teorema\ di\ Euclide\ (G.H.Hardy)}$$



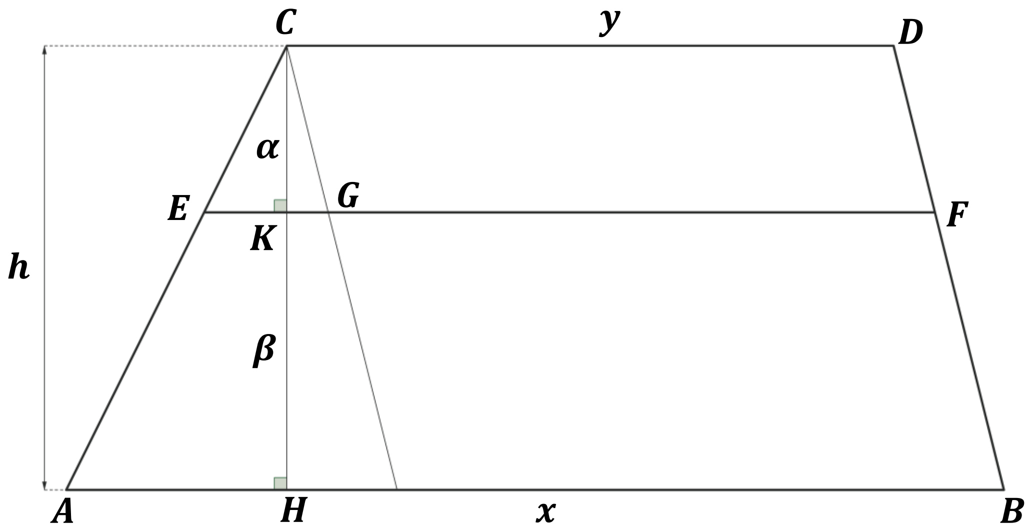
$$h^2 = xy \Leftrightarrow h = \sqrt{xy} \quad (II\ Euclide)$$

$$h^* = \frac{x+y}{2}$$

$$h \leq h^* \ (h = h^* \Leftrightarrow x = y)$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Medie e trapezi



$T = ABCD$

$\boldsymbol{x} = \overline{AB}$

$\boldsymbol{y} = \overline{CD}$

$\boldsymbol{\alpha} = \overline{CK}$

$\boldsymbol{\beta} = \overline{HK}$

$T(\alpha) = EFDC$

$T(\beta) = ABFE$

$L(\alpha, \beta) = \overline{EF}$

Con un po' di geometria sui triangoli si riconosce

- $L(\alpha, \beta) = \frac{x+y}{2} = A(x, y) \Leftrightarrow \alpha = \beta$
- $L(\alpha, \beta) = \sqrt{xy} = G(x, y) \Leftrightarrow T(\alpha) \sim T(\beta)$

Quindi

$$A(x, y) = G(x, y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \text{il trapezio } T \text{ è un parallelogramma}$$

Inoltre

$$L(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\Leftrightarrow a\big(T(\alpha)\big)=a\big(T(\beta)\big)$$

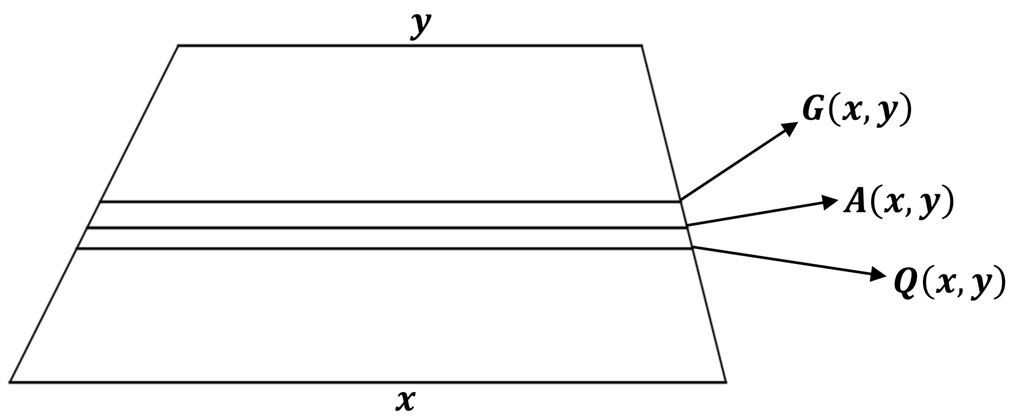
Si pone

$$Q(x,y)=media\ quadratica=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Vale la seguente relazione fra medie

$$\boldsymbol{G(x,y)\le A(x,y)\le Q(x,y)}$$

e vale $=\Leftrightarrow x=y$.



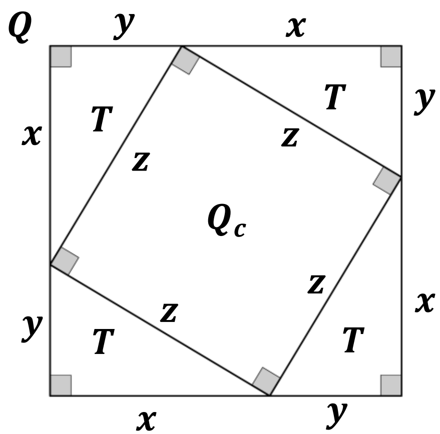
Medie e Teorema di Pitagora

Formula di J.A. Garfield

Sia T un triangolo rettangolo avente i cateti di lunghezza x e y e ipotenusa di lunghezza z. Allora

$$(x+y)^2 = z^2 + 4a(T)$$

dove T è un triangolo i cui lati misurano x, y, z.



$$a(Q) = a(Q_c) + 4a(T)$$

Conseguenze della formula di Garfield

- *Teorema di Pitagora*

$$(x+y)^2 = z^2 + 4a(T) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

- *Relazione tra medie*

Vale

$$A^2 = \frac{G^2 + Q^2}{2}$$

Infatti

$$(x+y)^2 = z^2 + 4a(T) \Leftrightarrow (T.Pitagora)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow 4A^2 = 2Q^2 + 2G^2$$

Problema isoperimetrico per i triangoli

Euclide incontra Fermat

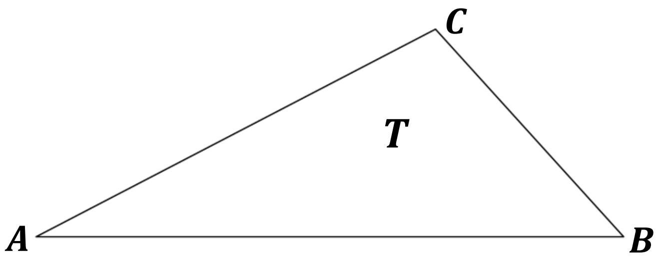
I triangoli *isoperimetrici* sono i triangoli *equilateri*

Precisamente, vale il seguente

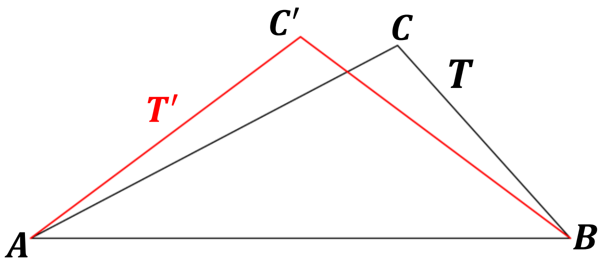
Teorema. Fra tutti i triangoli di *assegnato perimetro* quello *equilatero* – e solo quello equilatero – ha *area massima.*

Unicità (Zenodoro). Se T è *isoperimetrico* (ovvero: se T ha area massima fra tutti i triangoli aventi il suo stesso perimetro) allora T è *equilatero.*

Dimostrazione. Sia $T = ABC$ un triangolo *non equilatero,* ad esempio $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.



Allora esiste un triangolo isoscele $T' = ABC'$ tale che $p(T') = p(T)$, $a(T') > a(T)$



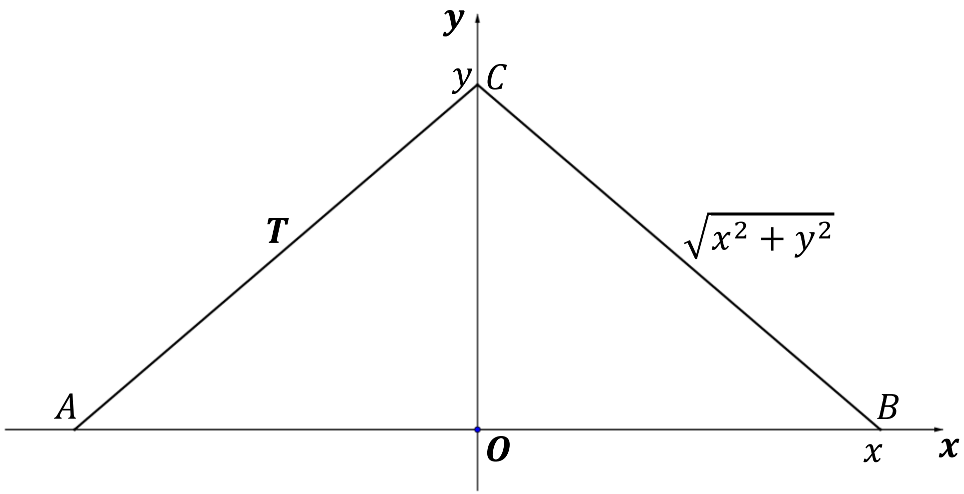
Quindi T *non è isoperimetrico.*

Esistenza

- Dato un qualunque triangolo ve n'è uno isoscele avente il suo stesso perimetro e area maggiore (o uguale).

- Per dimostrare che fra tutti i triangoli di assegnato perimetro ve n'è uno di area massima basta quindi dimostrare che *fra tutti i triangoli isosceli* di assegnato perimetro ve n'è uno di area massima.

- Poiché perimetro e area di ogni figura geometrica sono invarianti per rotazioni e traslazioni non è restrittivo - ai fini della dimostrazione dell'esistenza di un triangolo isoperimetrico – considerare solo triangoli isosceli con base AB sull'asse delle ascisse e vertice C sull'asse delle ordinate.



$$p = p(x, y) = 2x + 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Se $q = \frac{p}{2}$ è il semiperimetro di T

$$q = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Essendo $x \geq 0$, $q \geq x + \sqrt{x^2} = 2x$. Pertanto

$$0 \leq x \leq \frac{q}{2}$$

Analogamente, essendo anche $y \geq 0$, $q \geq \sqrt{y^2} = y$. Quindi

$$0 \leq y \leq q$$

Di conseguenza

$$q = x + \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow q - x = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (q - x)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow q^2 + x^2 - 2qx = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{q^2 - y^2}{2q}$$

Pertanto

$$a(T) = xy = \frac{y}{2q}(q^2 - y^2)$$

Allora: dimostrare *l'esistenza di un triangolo isoperimetrico* è equivalente a dimostrare che la funzione

$$y \longmapsto f(y) \coloneqq \frac{y}{2q}(q^2 - y^2), \quad 0 \leq y \leq q$$

ha massimo sull'intervallo $0 \leq y \leq q$. Osserviamo che $f(y)$ si può scrivere nella forma

$$f(y) = \frac{q}{2} y \left(1 - \left(\frac{y}{q}\right)^2\right)$$

onde, ponendo $\frac{y}{q} = t$,

$$f(tq) = \frac{q^2}{2} t(1 - t^2)$$

con $0 \leq t \leq 1$.

Massimizzare f sull'intervallo $0 \leq y \leq q$ equivale pertanto a massimizzare la funzione

$$t \longmapsto g(t) := t(1 - t^2)$$

sull'intervallo $0 \leq t \leq 1$ ($\Leftrightarrow 0 \leq y \leq q$).

Abbiamo così riconosciuto che

Fra tutti i triangoli di perimetro $p = 2q$ ve n'è uno di area massima se e solo se la funzione

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = t(1 - t^2)$$

ha massimo.

Ricordiamo: questo significa dimostrare che esiste $t_0 \in [0,1]$: $g(t) \leq g(t_0)$ per ogni $t \in [0,1]$.

Dimostrare questa affermazione è facile usando il calcolo infinitesimale. *Ma noi vogliamo – viceversa – partire da questo problema per comprendere l'idea che condusse Fermat alla nozione di derivata.*

Sia $t_0 \in [0,1]$ fissato e scriviamo g come polinomio nella variabile $h = t - t_0$.

Possiamo procedere così: visto che

$$t = t_0 + (t - t_0) = t_0 + h$$

Si ha

$$\begin{aligned} g(t) &= t - t^3 = (t_0 + h) - (t_0 + h)^3 = t_0 + h - (t_0^3 + 3t_0^2 h + 3t_0 h^2 + h^3) \\ &= t_0 - t_0^3 + (1 - 3t_0^2)h - (3t_0 + h)h^2 \\ &= g(t_0) + (1 - 3t_0^2)h - (3t_0 + h)h^2 \end{aligned}$$

Definiamo

$$g'(t_0) \coloneqq 1 - 3t_0^2$$

Allora

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)h - (3t_0 + h)h^2$$

Questa identità vale per ogni $t, t_0 \in [0,1]$, con $h = t - t_0$.

Osserviamo ora che

$$3t_0 + h = 3t_0 + t - t_0 = 2t_0 + t \geq 0 \text{ per ogni } t, t_0 \in [0,1]$$

In definitiva

$$(*) \qquad g(t) \leq g(t_0) + g'(t_0)h$$

per ogni $t, t_0 \in [0,1]$.

Quindi, se scegliamo

$$t_0 \in [0,1]: g'(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

troviamo

$$g(t) \leq g(t_0) \quad \text{per ogni } t \in [0,1]$$

In altri termini

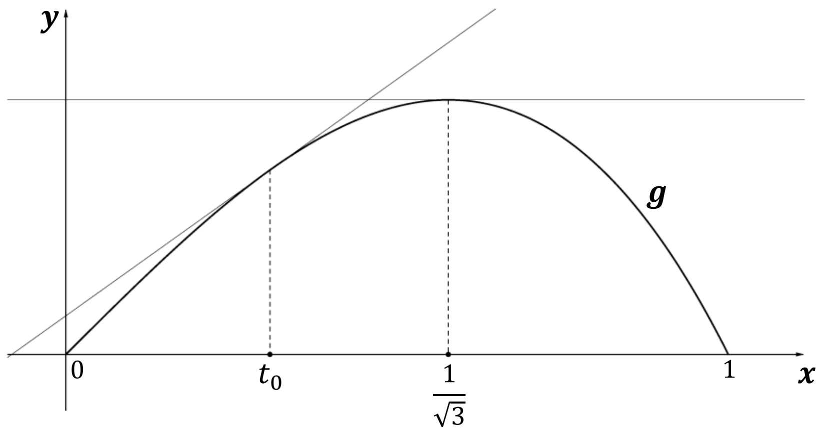
g ha massimo in $[0,1]$ e il suo massimo è $g(t_0)$

Questo conclude la dimostrazione del teorema isoperimetrico per i triangoli

NOTA (Anticipazione…) La disuguaglianza

$$(*) \qquad g(t) \le g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0)$$

esprime la concavità della funzione g su $[0,1]$.



L'esistenza del massimo di g che abbiamo appena dimostrato è un caso particolare di un teorema generale: *ogni funzione concava (convessa) su un intervallo limitato e chiuso è dotata di massimo (minimo).*

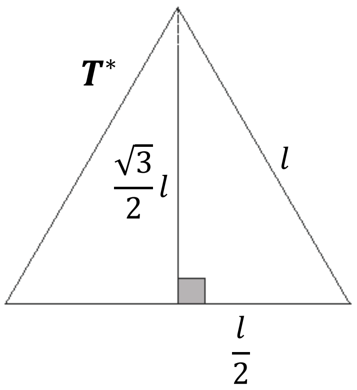
Disuguaglianza isoperimetrica per i triangoli

Se T è un qualsiasi triangolo allora

$$a(T) \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}\big(p(T)\big)^2$$

e vale l'uguaglianza se e solo se T è un triangolo equilatero.

Dimostrazione. Sia T^* il triangolo equilatero tale che $p(T^*) = p(T)$ e $a(T^*) \geq a(T)$, con $a(T^*) > a(T)$ se T non è un triangolo equilatero.



$$a(T^*) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{p(T^*)}{3}\right)^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}\left(\frac{p(T^*)}{3}\right)^2$$

$$a(T) \leq a(T^*) = \frac{1}{12\sqrt{3}}\left(\frac{p(T^*)}{3}\right)^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}\left(\frac{p(T)}{3}\right)^2$$

Proprietà duale di quella isoperimetrica dei triangoli equilateri

Fra tutti i *triangoli di area assegnata* quello *equilatero ha perimetro minimo.*

Anche questa proprietà duale si dimostra usando la disuguaglianza isoperimetrica.

Indichiamo con T un triangolo qualunque e T^* il triangolo equilatero tale che $a(T^*) = a(T)$.

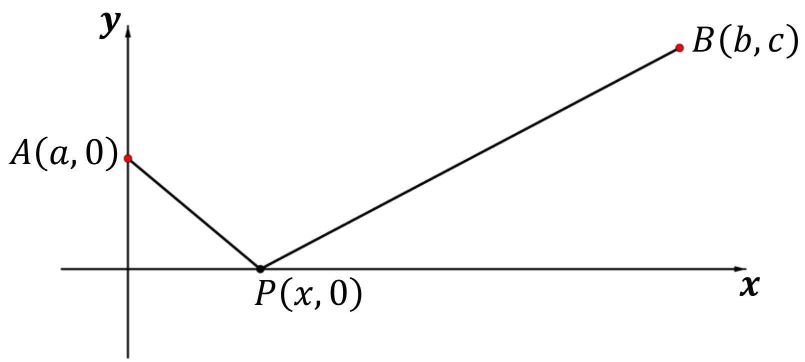
$$\left(p(T^*)\right)^2 = 12\sqrt{3}a(T^*) = 12\sqrt{3}a(T) \leq \left(p(T)\right)^2$$

Da cui

$$p(T^*) \leq p(T)$$

Vale l'uguaglianza se e solo se $T \cong T^*$.

Riflessione e funzioni convesse



La lunghezza della poligonale $AP + PB$ è data da

$$L(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + c^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Sappiamo che questa funzione ha minimo se e solo se vale il principio di rflessione da specchi piani.

L'esistenza del minimo segue da un teorema generale sulle funzioni convesse:

ogni funzione convessa e coerciva è dotata di minimo

Nota. La convessità della funzione $x \longmapsto L(x)$ segue dal fatto di essere somma delle funzioni convesse $x \longmapsto \sqrt{x^2 + a^2}$ e $x \longmapsto \sqrt{(x-b)^2 + c^2}$.

Queste sono convesse perché il oro grafici sono rami di iperboli equilatere le quali giacciono, come è noto, da una stessa parte rispetto a ogni loro retta tangente.

Chiudiamo avvertendo che

- la nozione di funzione convessa
- la nozione di retta tangente al grafico di una funzione convessa
- i teoremi di minimizzazione delle funzioni convesse

non richiedono – necessariamente – il calcolo infinitesimale di Fermat – Leibnitz – Newton e i teoremi di Weiertrass, Cauchy, ecc…