Analisi infinitesimale algebrica delle funzioni polinomiali

Richiami

- Polinomio : $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n ,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$: costanti reali

Un teorema di Ruffini

Sia p un polinomio e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Allora (algoritmo euclideo):

$$p(x) = (x - x_0)\, p_1(x) + R$$

ove p_1 è un polinomio e R, anch'esso polinomio, ha grado < 1. Quindi R è costante. Dovrà essere allora

$$R = p(x_0)$$

In definitiva:

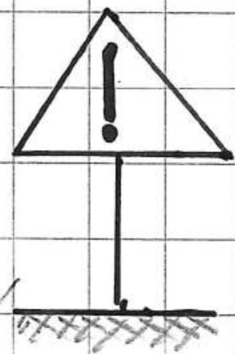
$$p(x) = (x - x_0)\, p_1(x) + p(x_0)$$

od anche

$$p(x) - p(x_0) = (x - x_0)\, p_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

oppure ancora

$$\frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = p_1(x) \quad \forall x \neq x_0$$



Legge di permanenza del segno

Sia p un polinomio e sia $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$p(x_0) > 0$$

Allora esiste un intervallo centrato in x_0,

$$I_r(x_0) :=]x_0 - r, x_0 + r[$$

tale che

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in I_r(x_0).$$

Analoga affermazione se $p(x_0) < 0$

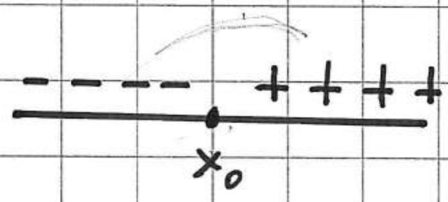
Conseguenza

Se un polinomio p cambia di segno passando da sinistra a destra di un punto x_0 allora deve essere

$$p(x_0) = 0$$

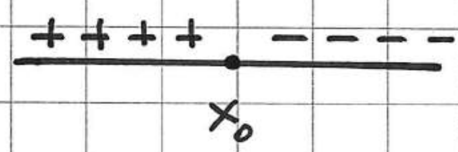
Diciamo che p **cambia di segno** "attraversando" il punto x_0 se esiste un intervallo $I_r(x_0)$ centrato in x_0 t.c.

$$\begin{cases} p(x) \le 0 & \text{se } x_0 - r < x < x_0 \\ p(x) \ge 0 & \text{se } x_0 < x < x_0 + r \end{cases}$$

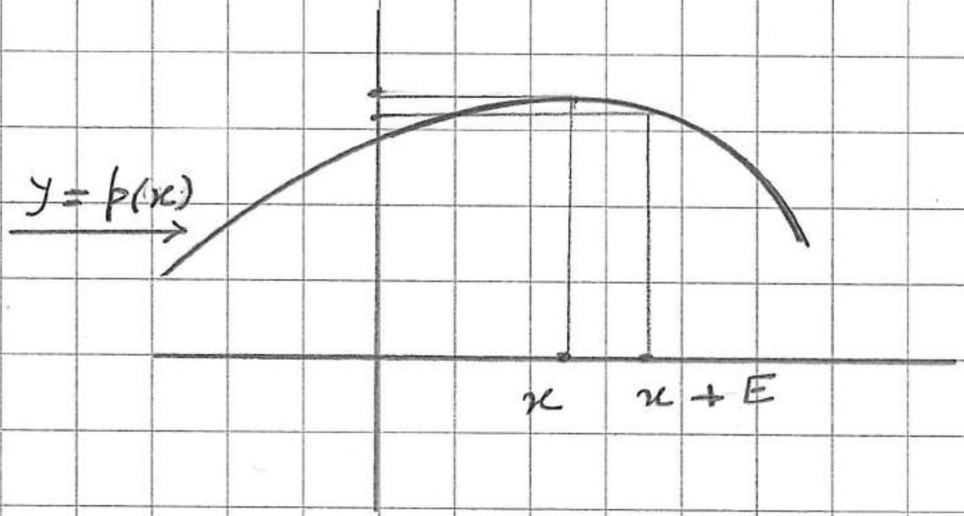


oppure

$$\begin{cases} p(x) \ge 0 & \text{se } x_0 - r < x < x_0 \\ p(x) \le 0 & \text{se } x_0 < x < x_0 + r \end{cases}$$



• Metodo di Fermat



x punto di max

$$\Downarrow$$

$$\frac{p(x+E)-p(x)}{E} \cong 0$$

$$\left.\frac{p(x+E)-p(x)}{E}\right|_{E=0} = 0$$

Come rendere rigoroso

il metodo di Fermat

per i polinomi?

Derivata di un polinomio

Sia p un polinomio e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sappiamo che esiste un polinomio p_1 t.c.

$$\frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = p_1(x) \quad \forall\, x \neq x_0$$

Chiamiamo: p_1 := quasi derivata di p in x_0

e poniamo

$$p'(x_0) = \underline{\text{derivata di } p \text{ in } x_0} := p_1(x_0)$$

Notazioni equivalenti: $p'(x_0)$, $Dp(x_0)$

NOTA La quasi derivata di un polinomio p, in un punto x_0, è l'unico polinomio p_1 t.c.

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)\, p_1(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Esempi

- Derivata di $p(x) = x$.

$$\longrightarrow \quad p(x) - p(x_0) = x - x_0 \Rightarrow p_1(x) \equiv 1 \Rightarrow$$

$$p'(x_0) = p_1(x_0) = 1$$

Dunque: $\quad D\,x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Derivata di $f(x) = x^2$.

$$\longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x - x_0)\underbrace{(x + x_0)}_{f_1(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = f_1(x_0) = 2x_0$$

Dunque: $D\,x^2 = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

- Derivata di $f(x) = x^3$

$$\longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) = x^3 - x_0^3 = (x - x_0)\overbrace{(x^2 + x x_0 + x_0^2)}^{f_1(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f_1(x_0) = 3x_0^2 \quad \Rightarrow D\,x^3 = 3x^2 \quad \forall x.$$

- Derivata di $p(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\longrightarrow p(x) - p(x_0) = x^n - x_0^n =$$

$$= (x - x_0)\underbrace{\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x\,x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}_{p_1(x)}$$

$$\Rightarrow \quad p'(x_0) = p_1(x_0) = n\,x_0^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad D\,x^n = n\,x^{n-1}$$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$

Regole di derivazione

- $D\big(p(x) + q(x)\big) = D p(x) + D q(x)$
- $D\big(c\, p(x)\big) = c\, D p(x)$
- $D\big(p(x)\, q(x)\big) = q(x)\, D p(x) + p(x)\, D q(x)$

(Leibnitz)

Conseguenza

$$D\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) =$$

$$a_1 + 2 a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

- Quindi: se p è un polinomio anche

$$p' : x \longmapsto p'(x)$$

è un polinomio, il polinomio derivato primo di p.

- Derivando p' si ottiene p'', il polinomio derivato secondo di p.

- Derivando p'' si ottiene $p''' := p^{(3)}$, il polinomio derivato terzo di p

- Ecc...

Torniamo a Fermat

- Sia x_0 un punto di <u>massimo</u> relativo per un polinomio p.

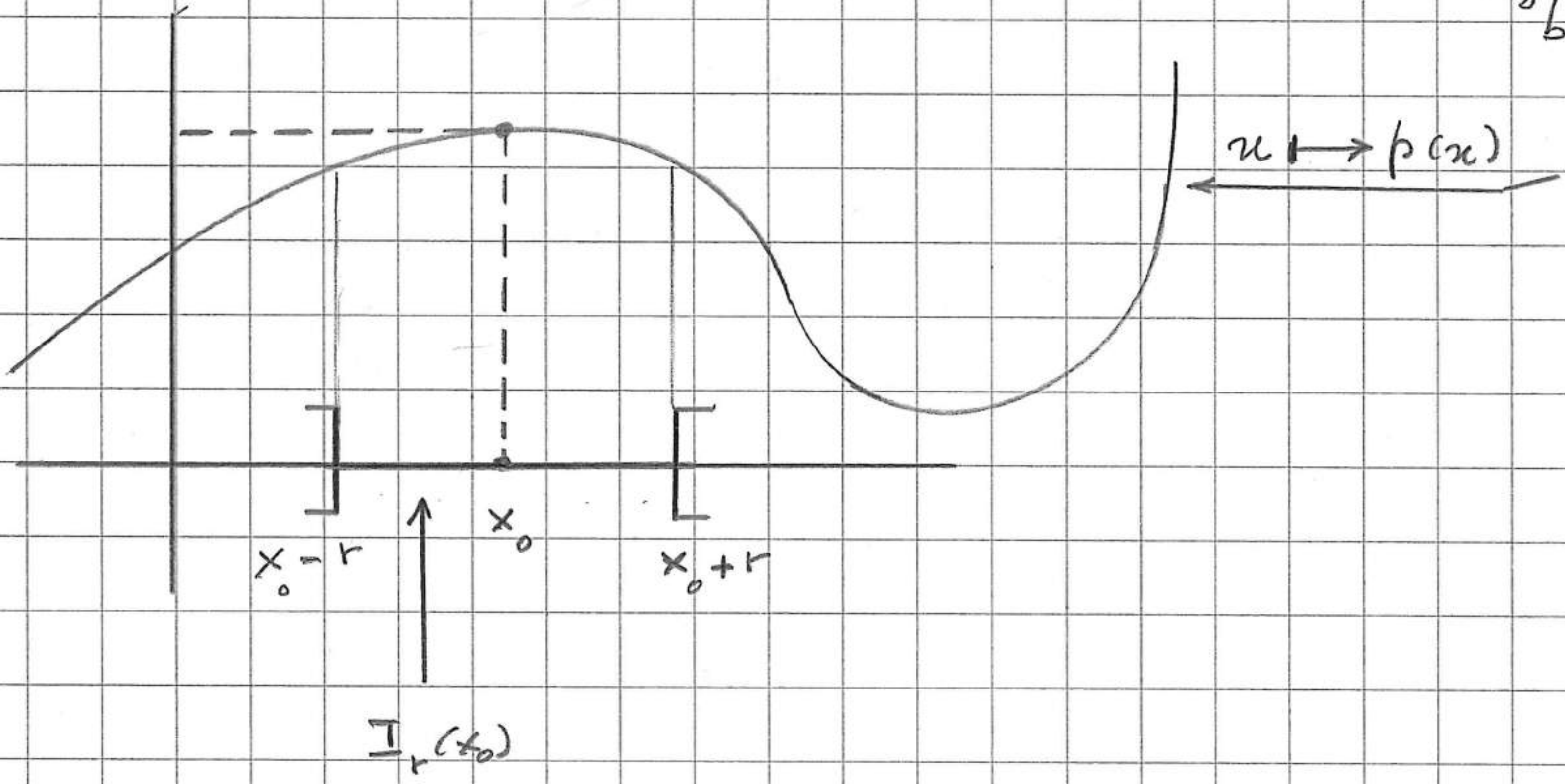
Questo significa

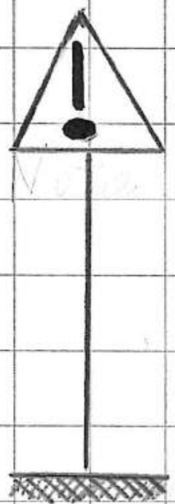
$$p(x) \leq p(x_0)$$

per ogni x di un opportuno intervallo centrato in x_0:

$$I_r(x_0) :=]\,x_0 - r\,, x_0 + r\,[$$

8_b





$$\frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \geq 0 \quad \text{se } \underline{x_0 - r < x < x_0} \\ \leq 0 \quad \text{se } \underline{x_0 < x < x_0 + r} \end{cases}$$

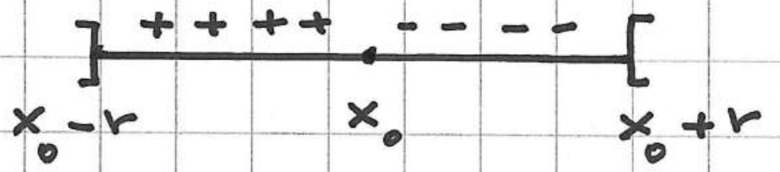
$= P_1(x)$

Quindi: $p_1(x)$ <u>cambia segno quando</u>
<u>x passa da sinistra a destra di x_0</u>

!? Questo non può succedere senza che p_1 si annulli in x_0

Deve quindi essere

$$p_1(x_0) = 0 \;, \; i.e., \quad \underline{\underline{p'(x_0) = 0}}$$



← <u>segno di p_1</u>

Conclusione

Teorema di Fermat. Se x_0 è un punto di massimo relativo per f allora

$$f'(x_0) = 0$$

NOTA Lo stesso vale se x_0 è un punto di minimo relativo per f.

Ricerca del massimo (minimo) di una funzione polinomiale su un intervallo $[a, b]$.

• **Pb.** Sia p un polinomio e sia dato

$$[a, b] \quad , \; -\infty < a < b < \infty .$$

Esiste $\max\limits_{[a,b]} p$? . Cioé:

esiste $\bar{x} \in [a, b]$ t.c.

$$p(x) \leq p(\bar{x}) \quad \text{per ogni } x \in [a,b] \; ?$$

Sapendo che il massimo esiste,

Fermat ci dice come fare per trovarlo

Precisamente:

$$\max_{[a,b]} p =$$

$$= \max \{ p(a), p(b); p(x) : p'(x) = 0, a < x < b \}$$

Nei corsi di Analisi Matematica
l'esistenza del massimo di una funzione reale
viene riconosciuta ricorrendo ad un celebre
teorema di Weierstrass la cui dimostrazione
richiede nozioni topologiche alla base delle
quali sta quello di limite

Ma per i <u>polinomi</u> l'uso del limite

si può evitare ricorrendo alla nozione

di derivata – che abbiamo appena

introdotto – e ad un teorema

intuitivamente evidente (?!) come

<u>quello degli zeri</u>

Teorema degli zeri

21

Se un polinomio assume valori di segno opposto in due punti - distinti - allora si annulla in almeno un punto fra loro intermedio

Dimostrazione.

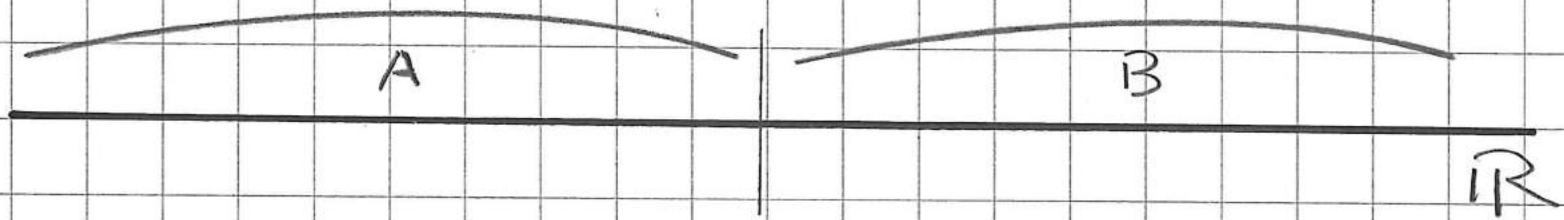
Legge di conservazione del segno

+

continuità della retta reale

27/14 b

Completezza della retta reale (Dedekind)



$$\begin{cases} A \cup B = \mathbb{R} \\ x \in A \,,\, y \in B \Longrightarrow x \le y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Esiste c: $x \le c \le y$

per ogni $x \in A$ e $y \in B$

Corollario

p = polinomio : $p(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Downarrow$$

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

oppure

$$p(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Il Teorema di Rolle

Sia p un polinomio tale che

$$p(a) = p(b) \quad , -\infty < a < b < \infty$$

Allora esiste $c \in]a, b[$ t.c.

$$p'(c) = 0$$

Dimostrazione: Possiamo supporre

$$p(a) = p(b) = 0$$

e che $p(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$

Per Ruffini:

$$p(x) = (x-a)^m (x-b)^n q(x)$$

con $q(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Sarà quindi: $q(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$

oppure $q(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Per fissare le idee supponiamo si verifichi la prima eventualità.

Supponiamo poi, per semplicità, $m = n = 1$.

Quindi:

$$p(x) = (x-a)(x-b)\,q(x) \quad , \; q(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Deriviamo:

$$p'(x) = (x-b)\,q(x) + (x-a)\,q(x) + (x-a)(x-b)\,q'(x)$$

Allora

$$\left.\begin{array}{l} p'(a) = (a-b)\,q(a) < 0 , \\ p'(b) = (b-a)\,q(b) > 0 . \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

esiste $c \in \,]a, b[\; : \; p'(c) = 0$

Teorema di Rolle

$$\Downarrow$$

Teorema del valor medio, di Lagrange

$$\Downarrow$$

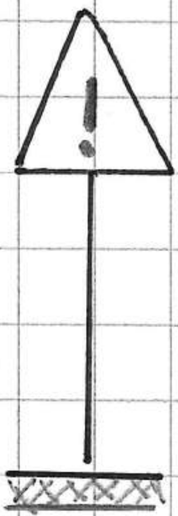
Criteri di monotonia

- $f \nearrow$ su $[a, b] \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \,]a, b[$

- $f \searrow$ su $[a, b] \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \,]a, b[$

Osservazione

Se $p'(x) \neq 0 \ \forall x \in \,]a, b[$ allora



$$\max_{[a,b]} p = \max\{p(a), p(b)\},$$

$$\min_{[a,b]} p = \min\{p(a), p(b)\}.$$

Da queste segue facilmente il

Teorema di Weierstrass per i polinomi

<u>Teorema.</u> Se p è un polinomio e $[a,b]$ è un intervallo limitato e chiuso allora p ha massimo e minimo in $[a,b]$.

Precisamente: esistono $\bar{x}$ e $\underline{x}$ in $[a,b]$ tali che

$$p(\underline{x}) \le p(x) \le p(\bar{x})$$

per ogni $x \in [a,b]$

Dimostrazione. • Se p è costante: n.d.d.

• Se $p'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$: Oss. prec.

• Se p' si annulla in qualche punto di $]a, b[$ allora, essendo un polinomio, di zeri ne ha un numero finito. Siano essi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ordinati nel modo seguente:

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < b$$

Allora: p' non ha zeri negli intervalli

$]a, \alpha_1[\, , \;]\alpha_1, \alpha_2[\, , \dots , \;]\alpha_m, b[$

quindi

$$\max_{[a,\alpha_1]} p = \max\{p(a), p(\alpha_1)\},$$

$$\max_{[\alpha_1,\alpha_2]} p = \max\{p(\alpha_1), p(\alpha_2)\},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\max_{[\alpha_m, b]} p = \max\{p(\alpha_m), p(b)\}$$

Conclusione :

$$\max_{[a,b]} p = \max \{ p(a), p(\alpha_1), \ldots, p(\alpha_m), p(b) \}$$

$$= \max \{ p(a), p(b) ; p(x) : a < x < b , p'(x) = 0 \}$$

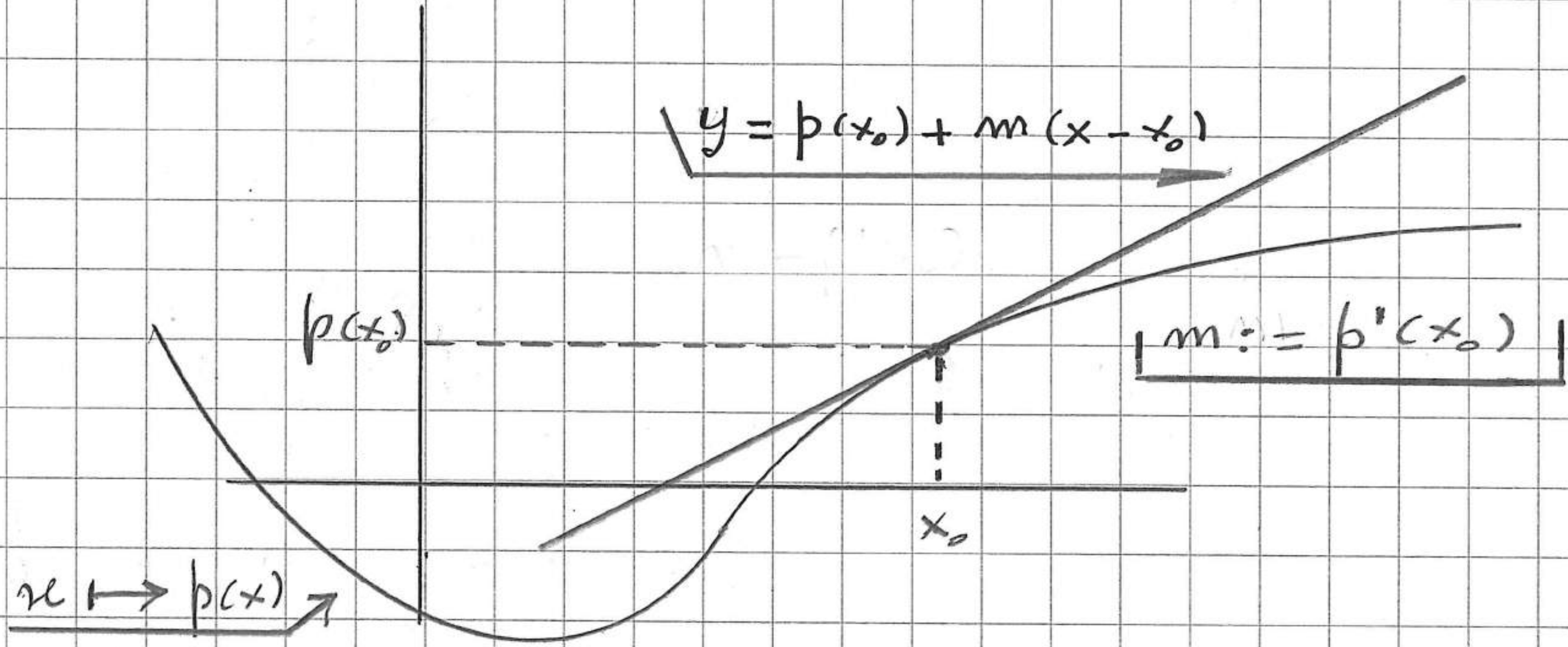
Analogo risultato per

$$\min_{[a,b]} p$$

• Retta tangente

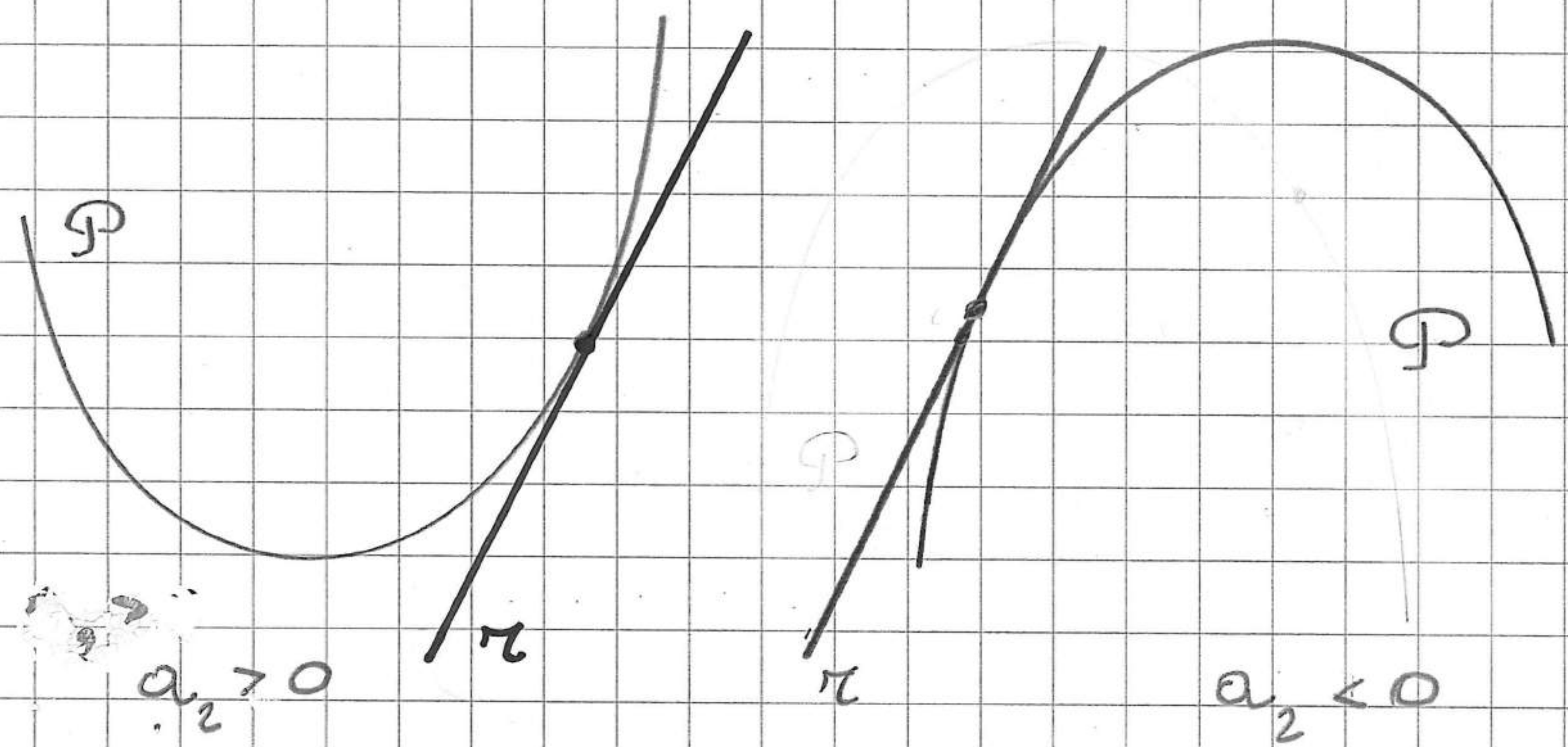
Sia p un polinomio e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.
Definiamo (!) <u>retta tangente</u> al grafico di p nel punto $(x_0, p(x_0))$ quella di equazione

$$y = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0)$$



<u>Domanda</u>: questa definizione corrisponde all'<u>idea intuitiva</u> di retta tangente?

- $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- $r := $ __retta di eq.__ $y = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0)$
- $\mathcal{P} := $ __parabola__ grafico di p



In generale:

- p = polinomio qualunque ; $x_0 \in \mathbb{R}$
- $p^+(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x-x_0) + M(x-x_0)^2$
- $p^-(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x-x_0) - M(x-x_0)^2$

! Esiste $M > 0$ tale che

$\longrightarrow$ $p^-(x) \leq p(x) \leq p^+(x)$ se $|x - x_0| < 1$;

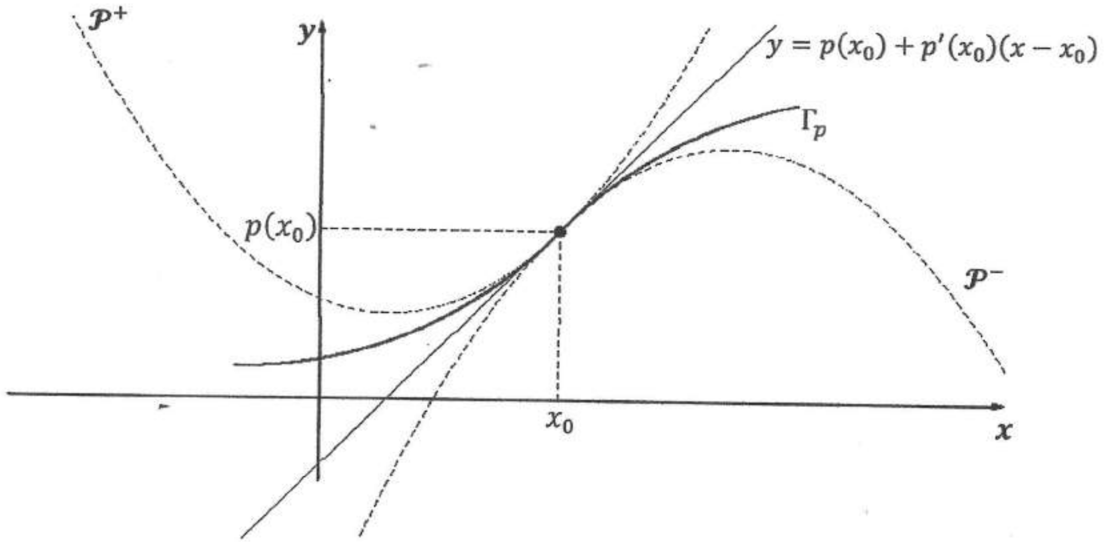
$\longrightarrow$ $p^-(x_0) = p(x_0) = p^+(x_0)$.

Quindi:

→ il grafico di p – per gli x "vicini" a x_0 – è "compreso" fra le parabole $\mathcal{P}^+$ e $\mathcal{P}^-$, grafici di p^+ e p^-, rispettivamente. Inoltre: $\mathcal{P}^+$ e $\mathcal{P}^-$ contengono entrambe il punto $(x_0, p(x_0))$ ed hanno in esso la <u>stessa retta tangente</u>: quella di equazione

$$\longrightarrow \quad y = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0)$$

Appare quindi ragionevole, e coerente con l'intuizione, assumere come retta tangente al grafico di p in $(x_0, p(x_0))$ quella di equazione: $y = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0)$



Problemi risolubili col calcolo differenziale per i polinomi

• (Fermat) Fra tutti i cilindri circolari inscritti in una sfera ve n'è uno

- di volume massimo
- di area della sup. laterale massima

p/2

• (Keplero) Fra tutti i

cilindri circolari

parallelepipedi retti

inscritti in una sfera ve n'e' uno di volume massimo

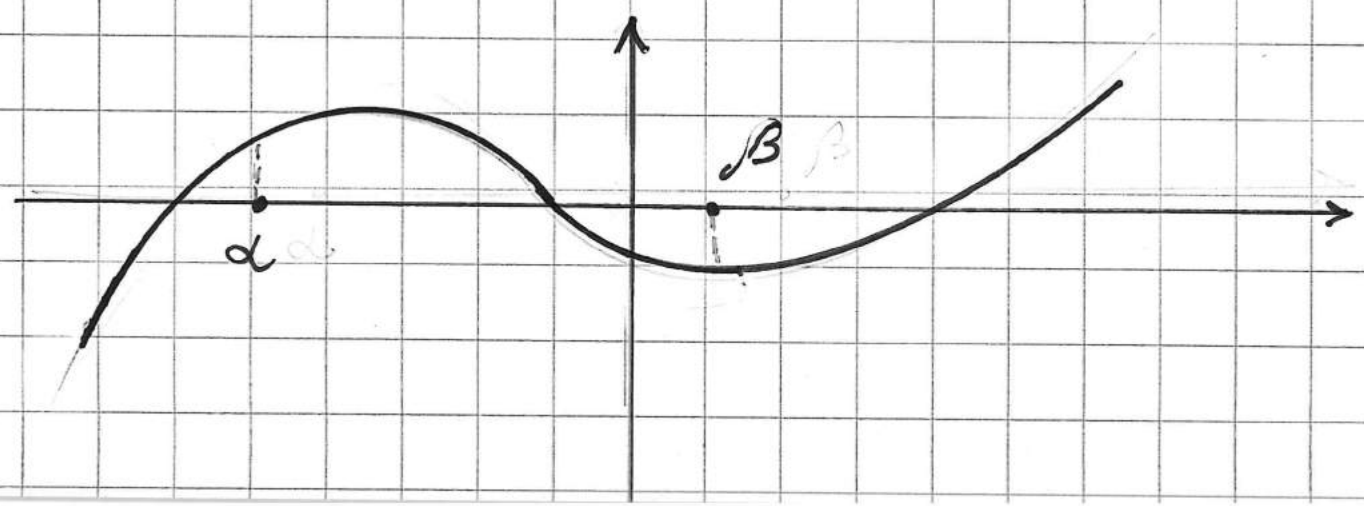
• (Problema del costruttore di lattine)

Quali dimensioni deve avere un cilindro circolare retto affinché – a parità di superficie totale – il suo volume sia massimo?

- Sia $p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Il polinomio p ha tre radici distinte se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$ tali che

$$p(\alpha) > 0 \;,\; p(\beta) < 0$$



- Funzioni convesse:

  un calcolo differenziale geometrico

- Le funzioni convesse hanno un ruolo cruciale nella teoria delle disuguaglianze e nei problemi di minimo dell'Analisi Matematica

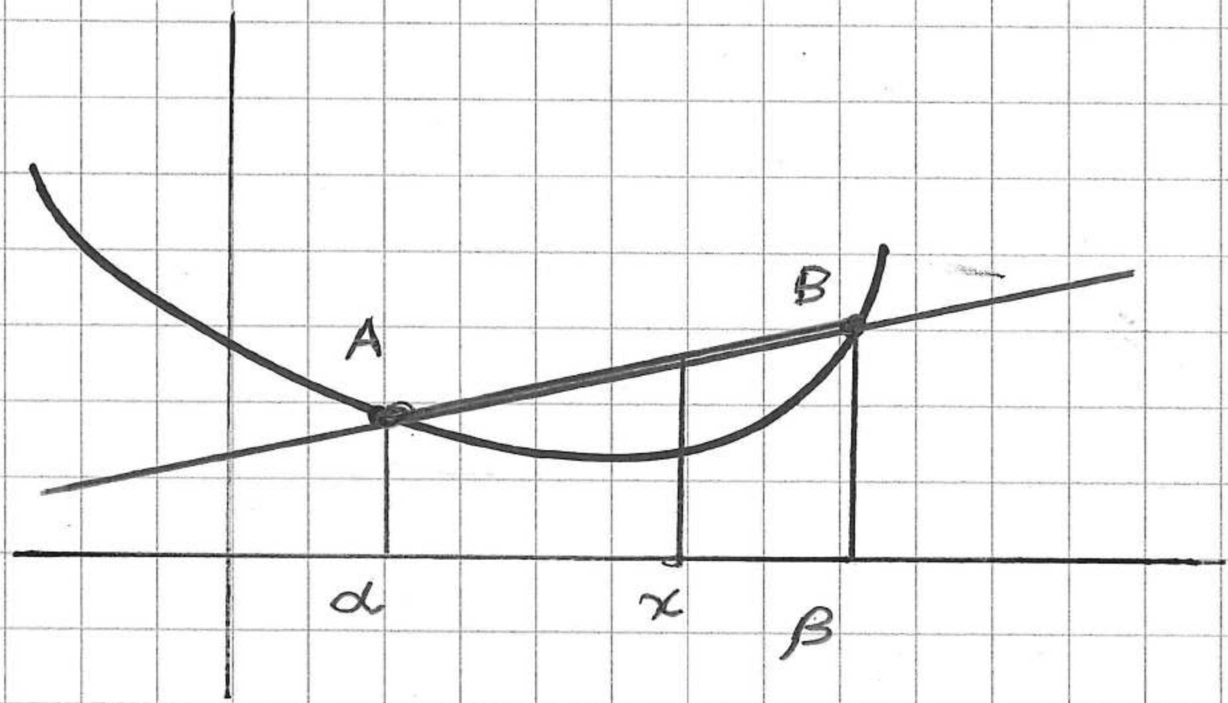
Ciò si deve alle due proprietà che le caratterizzano.

24 b

- <u>Convessità geometrica</u>

Una funzione si dice geometricamente convessa se la parte del suo grafico staccata da due suoi punti A e B giace interamente sotto il segmento di estremi A e B.

25|b

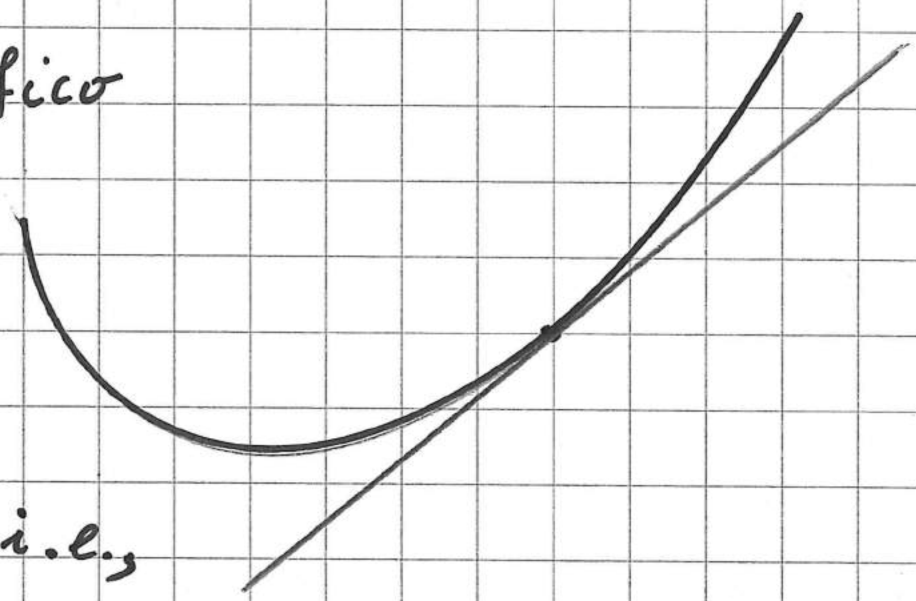


$$f(x) \leq f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

per $\alpha \leq x \leq \beta$

- <u>Convessità tangenziale</u>

Una funzione si dice <u>tangenzialmente convessa</u> se il suo grafico ha almeno una <u>retta di appoggio</u> in ogni punto del suo grafico; i.e., una retta che <u>tocca</u> il grafico lasciandolo tutto <u>sopra di essa</u>



. Precisamente: f è <u>tg-convessa</u> se per ogni punto x_0 del suo dominio esiste (almeno) un <u>$m \in \mathbb{R}$</u>:

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$$

per ogni x del dominio di f

La retta di equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

si dice che e' una <u>retta di appoggio</u> a f in x_0

- Il numero reale m si dice che è <u>una pendenza di f in x_0</u>

- Equivalenza:

<u>convessità geometrica</u>

$$\Updownarrow$$

<u>convessità tangenziale</u>

<u>Completezza della retta reale</u>

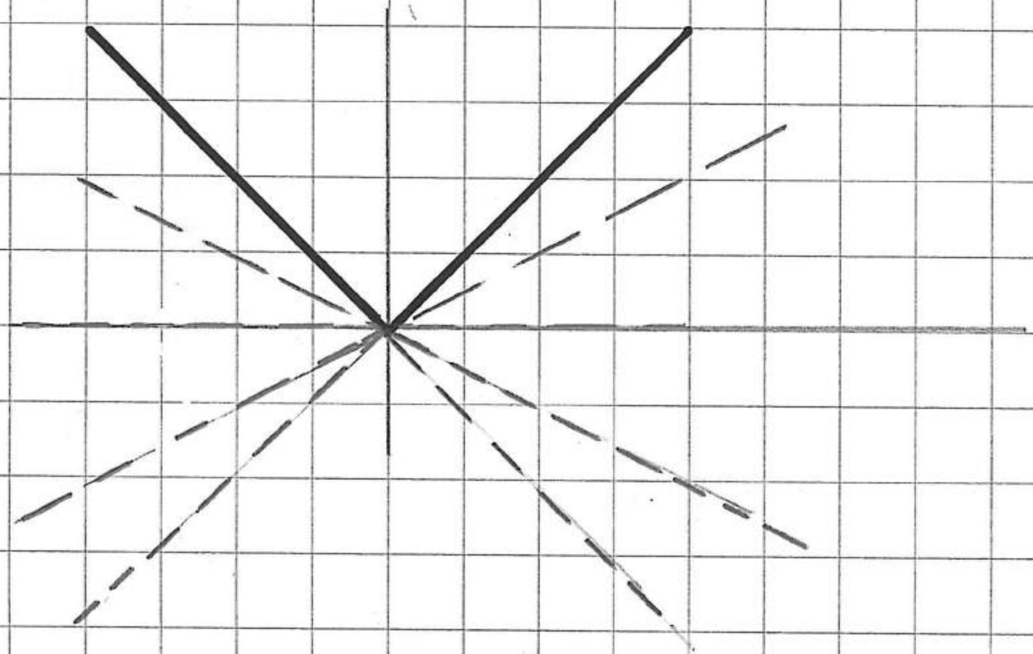
- La <u>convessità tangenziale</u> consente di sviluppare un <u>calcolo infinitesimale che non usa infinitesimi né limiti</u>

- <u>Rovesciando</u> il punto di vista classico si definisce la <u>derivata</u> di una funzione convessa attraverso il <u>coefficiente angolare</u> delle sue <u>rette di appoggio</u> quando queste diventano <u>rette "tangenti"</u>.

Precisiamo

- Una funzione convessa può avere diverse pendenze - diverse rette di appoggio - in un suo punto.

Esempio La funzione $f(x) = |x|$



. Se f (convessa) ha <u>una sola</u> <u>pendenza</u> m in x_0 diciamo che f è <u>tangenzialmente derivabile</u> in x_0 e poniamo

$$D_{tg} f(x_0) = \underline{\text{derivata}}\ \text{tang}\underline{\text{enzia}}\text{le}$$

$$\underline{\text{di}}\ f\ \underline{\text{in}}\ x_0 := m$$

<u>Esempi</u> 1) $f(x) = |x|$ è convessa ed è tg-derivabile con $D_{tg} |x| = \operatorname{sgn} x$ se $x \neq 0$

32/6

• 2) Un polinomio p è convesso se e solo se $p'' \geq 0$. In questo caso

$$D_{tg}\, p(x) = p'(x) \text{ per ogni } x$$

• 3) La funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

è convessa e tg-derivabile con

$$D_{tg} \sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

. Un semplice <u>cruciale</u> teorema "alla Fermat" per le f. convesse

<u>Teorema</u>.- Una <u>funzione convessa</u> f ha <u>minimo</u> se e solo se esiste un punto x_0 nel quale f ha almeno <u>una pendenza uguale a zero</u>

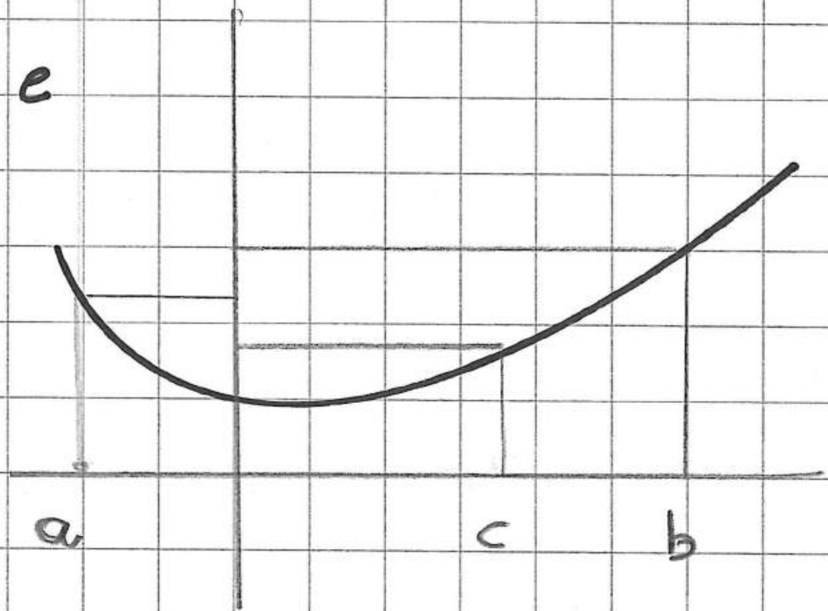
In questo caso

$$f(x_0) = \min f$$

- Il Teorema fondamentale per l'esistenza del minimo di una f. convessa

Teorema. Una funzione convessa f ha **minimo** se e solo se esistono a, b, c tali che $a < c < b$ e

$$f(a) \geq f(c),$$
$$f(b) \geq f(c).$$



Questo Teorema può considerarsi
un punto di arrivo del calcolo
infinitesimale per le funzioni convesse
nel quale, come nel caso dei polinomi,
giocano un ruolo cruciale la
continuità della retta reale e
la legge di conservazione del segno
per le funzioni convesse.

Esempio di applicazione.

Dalla convessità di $\sqrt{1+x^2}$

e dall'algebra delle f. convesse segue

la convessità di

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}{v_2},$$

$a, b, v_1, v_2, c > 0$.

Questa verifica l'ipotesi del

Teorema precedente, quindi <u>ha minimo</u>

L'esistenza di quel minimo implica:

la <u>legge di riflessione</u> da specchi piani

e

la <u>legge di Snell</u> sulla <u>rifrazione</u>

obbediscono entrambe al

<u>principio del minimo tempo</u>

di percorrenza delle traiettorie

della luce

Oltre i polinomi

Come estendere il calcolo differenziale a "tutte" le funzioni?

- Quello sviluppato per i polinomi si regge su:

→ La <u>completezza</u> della retta reale

→ La <u>legge di permanenza del segno</u>

Se f è un polinomio, da questa ultima legge segue:

(C) Se λ e μ sono numeri reali tali che $\mu < f(x_0) < \lambda$ allora esiste un intervallo I centrato in x_0 tale che

$$\mu < f(x) < \lambda \quad \text{per ogni } x \in I$$

Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica (C)

in ogni punto $x_0 \in A$ diciamo che

<u>f è una funzione continua in A</u>

$\longrightarrow$ Sono funzioni continue

- Le funzioni <u>elementari</u>
- <u>Somme</u>, <u>prodotti</u>, <u>quozienti</u> <u>composizioni</u>, <u>inverse</u> di funzioni continue

Definizione generale di derivata

- Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

unione di intervalli aperti

una funzione continua e sia $x_0 \in A$

Supponiamo che esista una

funzione $f_1 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

(continua, quindi, anche in x_0)

tale che

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f_1(x)$$

$$\Updownarrow$$

quasi derivata di f in x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_1(x)\ , \ x \neq x_0 .$$

Si dice allora che f è derivabile in x_0 e si pone

$$\longrightarrow f'(x_0) = \text{derivata di } f \text{ in } x_0 := f_1(x_0)$$