

SEMINARI DI CULTURA MATEMATICA 2011-2012

Jules Henry Poincaré: l'eredità carsica di un ingegnere minerario

Massimo Miari

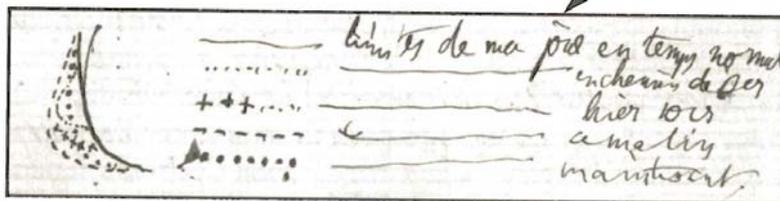
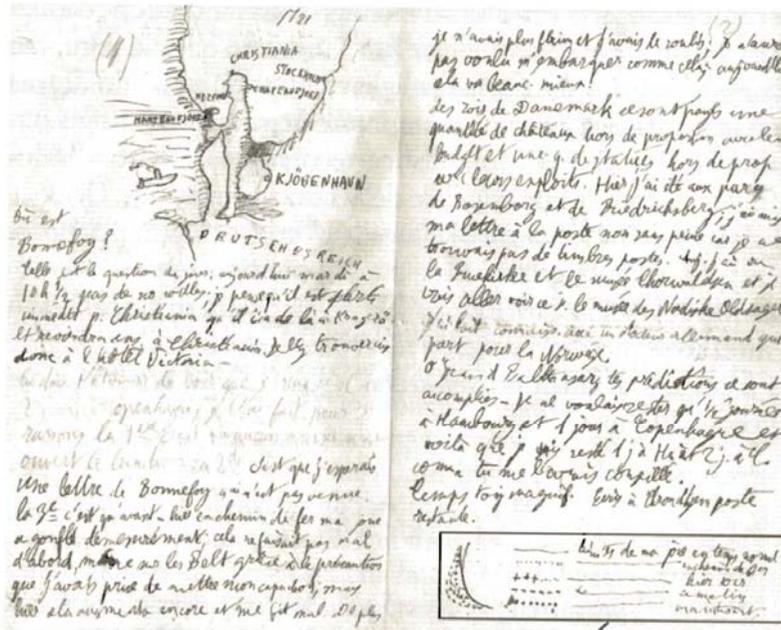
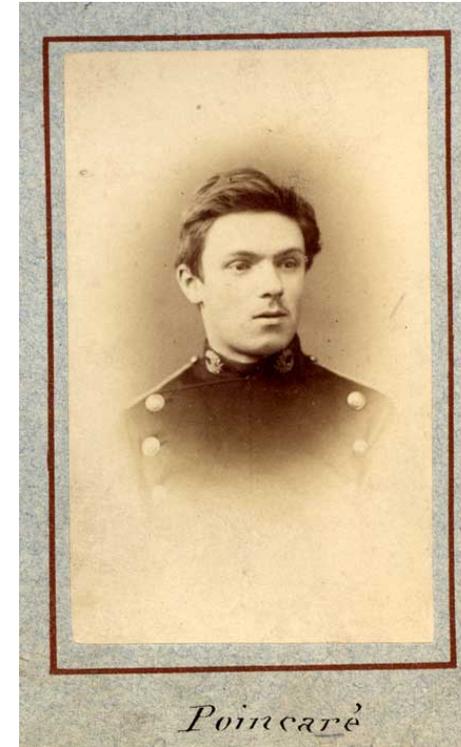


H. Poincaré ingegnere minerario

1873-1875 *École Polytechnique*

Ottobre 1875 - Marzo 1879 *École des Mines*

28 marzo 1879 - 30 novembre 1879 *Ispettore minerario*



On a dit, écrivais-je (ou à peu près), que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites. [...]

I La Congettura di Poincaré

[...] Oui, sans doute, mais à une condition. Les proportions de ces figures peuvent être grossièrement altérées, mais leur éléments ne doivent pas être transposés et ils doivent conserver leur situation relative. En d'autres termes, on n'a pas à s'inquiéter des propriétés quantitatives, mais on doit respecter les propriétés qualitative, c'est à dire précisément celles dont s'occupe l'Analysis Situs.

Primi Articoli topologici: 1892, 1895; Complementi alla Analysis Situs: 1899, 1900, 1902, 1902, 1904

Nel secondo complemento, ho mostrato che per caratterizzare una varietà non è sufficiente conoscere i suoi numeri di Betti: determinati coefficienti, che ho chiamato coefficienti di torsione, giocano infatti un ruolo rilevante. [...], se tutti i numeri di Betti e tutti i coefficienti di torsione di una varietà sono uguali a 1, quella varietà è omeomorfa a una sfera tridimensionale? Oppure, prima di poter rispondere affermativamente, è necessario studiare il gruppo fondamentale di questa varietà? [...]; di fatto, ho costruito un esempio di una varietà con tutti i numeri di Betti e tutti i coefficienti di torsione uguali a 1, ma che non è omeomorfa alla 3-sfera.

[...]
Rimane un'ulteriore questione da affrontare: è possibile che il gruppo fondamentale di una varietà sia l'identità, ma che la varietà in questione non sia omeomorfa alla sfera tridimensionale?

Ma questo problema ci porterebbe troppo lontano.

Congettura Ogni 3-varietà chiusa semplicemente connessa è omeomorfa alla 3-sfera

Dire che la **varietà è semplicemente connessa**
(o che il **gruppo fondamentale è l'identità**)
significa che **ogni arco chiuso (laccio) può essere ridotto a un punto**



La gara per il Polo Sud: vincitori



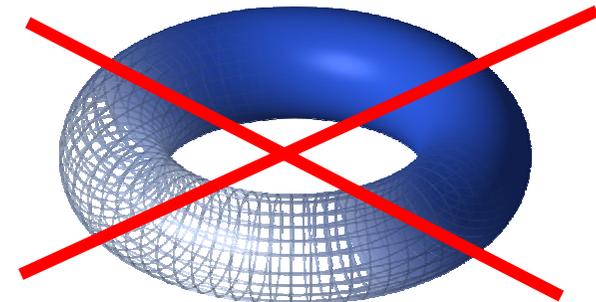
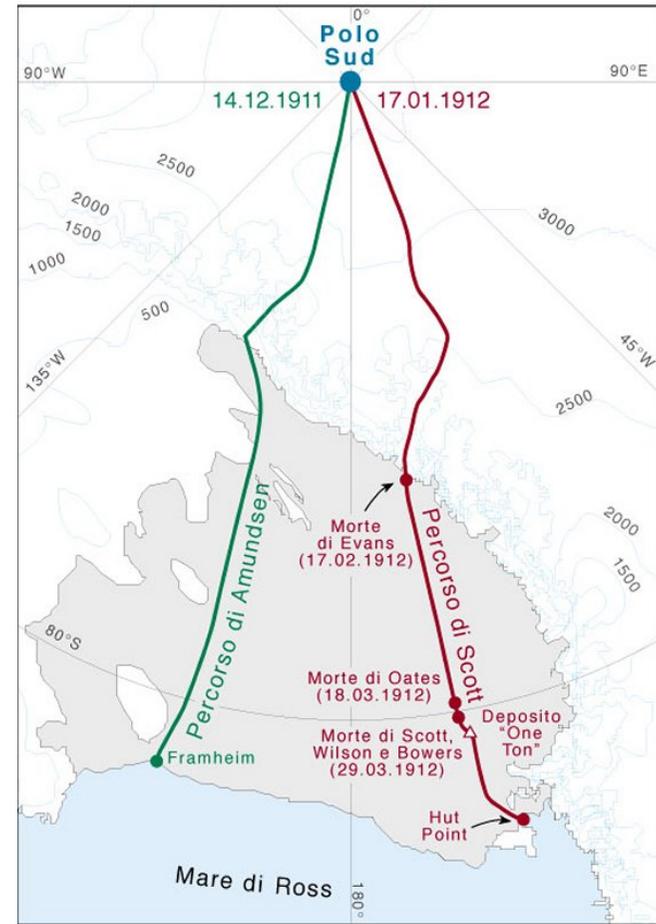
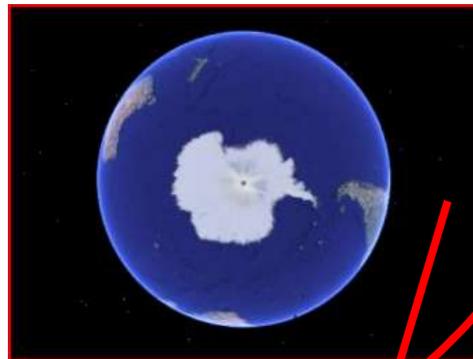
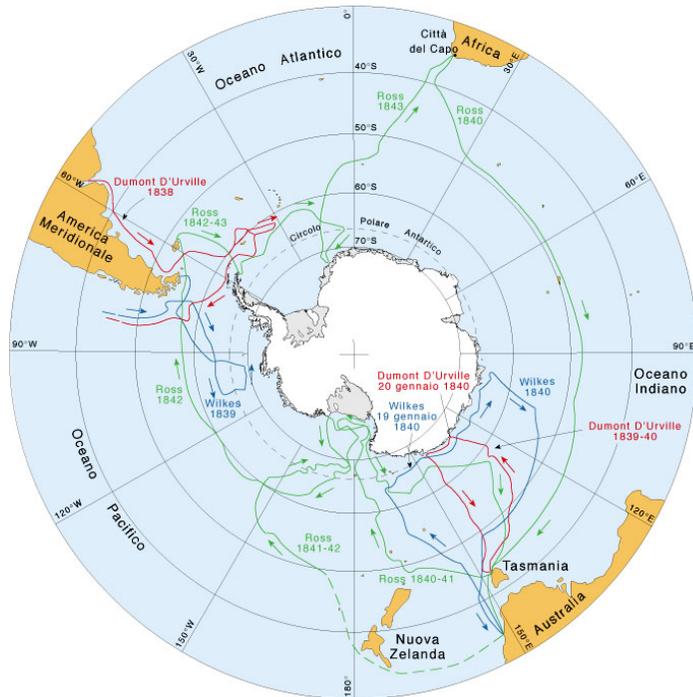
Roald Amundsen 14 dicembre 1911

e vinti



Robert Falcon Scott 17 gennaio 1912

Lacci sulla Terra



Distribuzione temporale della congettura

cfr. **D.O'Shea**, *La congettura di Poincaré*

P.Heegaard M.Dehn

H.Tietze

O.Veblen G.D.Birkhoff

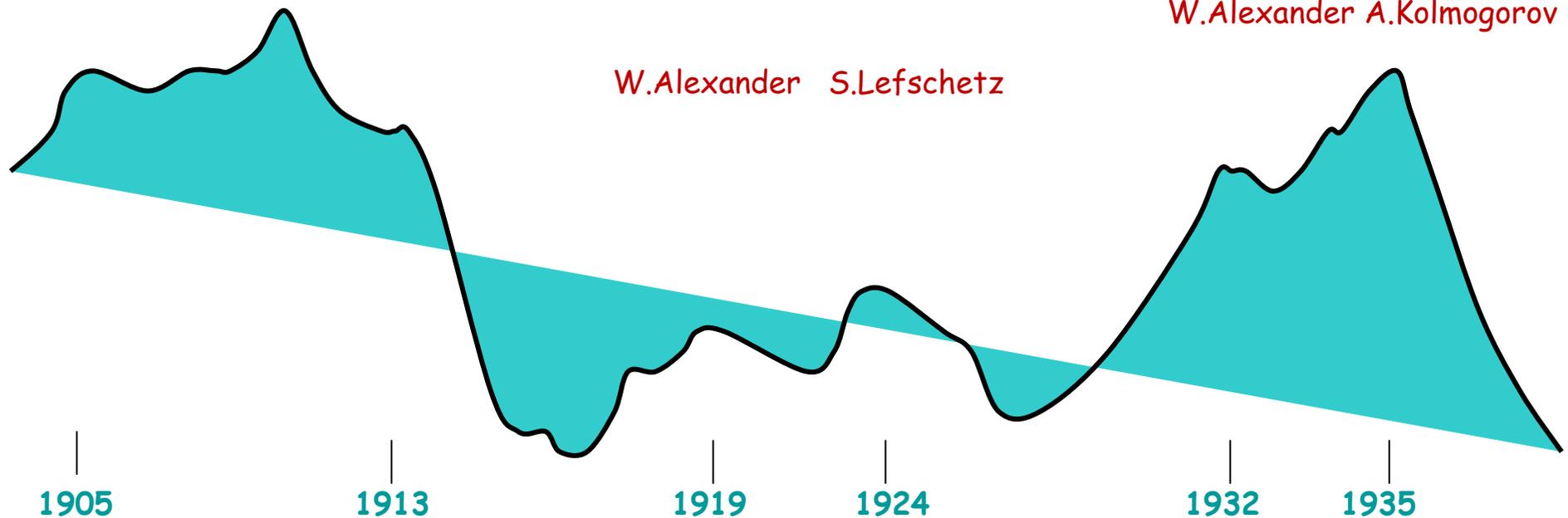
J.H.C.Whitehead

H.Seifert W.Threlfall

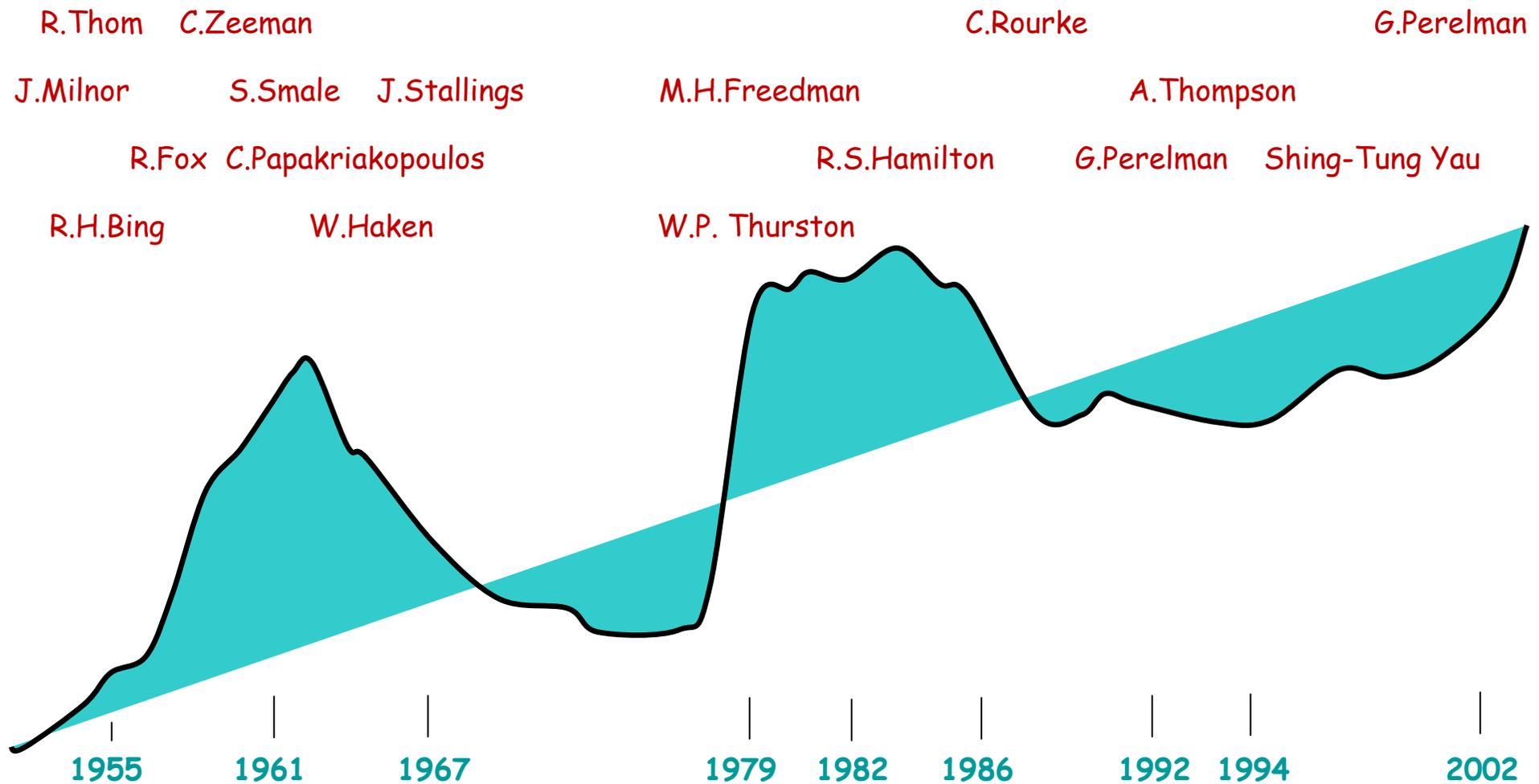
H.Hopf P.Alexandrov

W.Alexander A.Kolmogorov

W.Alexander S.Lefschetz



Distribuzione temporale della congettura



Le tappe più significative

Stephen Smale 1961 Per $n > 4$, una varietà n -dim compatta senza bordo semplicemente connessa e con la stessa omologia della n -sfera è omeomorfa alla n -sfera

Michael H. Freedman 1982 Ogni varietà topologica chiusa di dimensione 4 omotopicamente equivalente alla sfera quadridimensionale è omeomorfa ad essa.

William P. Thurston **Congettura di geometrizzazione**: qualunque varietà tridimensionale può essere scomposta in sottovarietà con struttura geometrica

La decomposizione ha luogo tagliando lungo sfere bidimensionali e tori, in modo unico e naturale

Ogni sottovarietà ha una delle **otto possibili geometrie**
(oltre alla geometria sferica, piatta e iperbolica; geometrie ibride)

La congettura è valida per una classe molto ampia di 3-varietà

Congettura di geometrizzazione \longrightarrow **Congettura di Poincaré**

Il Flusso di Ricci $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$ dove g_{ij} è il tensore metrico e
 R_{ij} è il tensore di curvatura di Ricci

Richard S. Hamilton Programma: lungo il flusso di Ricci una metrica arbitraria evolve verso una forma canonica i.e. una delle 8 geometrie identificate da Thurston. Queste dovrebbero comportarsi come punti fissi del flusso. Se, per una data varietà, è ammissibile una sola geometria, questa agisce come un attrattore del flusso.

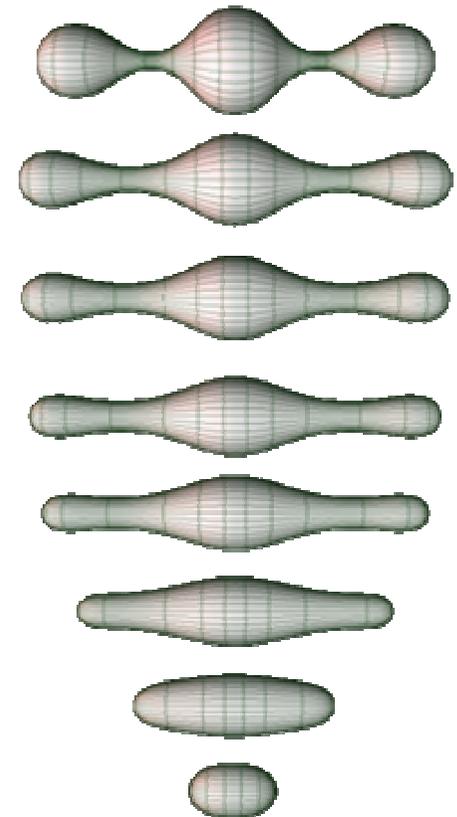
Così come il calore fluisce dalle aree più calde a quelle più fredde, così la curvatura fluisce dalle aree più curve a quelle meno curve.

1986 Partendo da una qualunque superficie bidimensionale compatta e lasciando che la curvatura evolva secondo il flusso di Ricci, si giunge a una superficie con curvatura costante

1982 Ogni varietà che ammette una metrica di curvatura positiva ammette una sola geometria di curvatura positiva costante. (evolve verso una metrica sferica)

Questo non prova la congettura di geometrizzazione perché i casi difficili si hanno per curvatura di Ricci negativa o in presenza di punti in corrispondenza dei quali la curvatura è nulla.

Il flusso di Ricci dà origine a singolarità



La congettura è provata

La non linearità dell'equazione di diffusione lascia aperta la possibilità che parti della varietà evolvano verso geometrie canoniche mentre altre parti sviluppino singolarità.

Questa difficoltà è promettente:

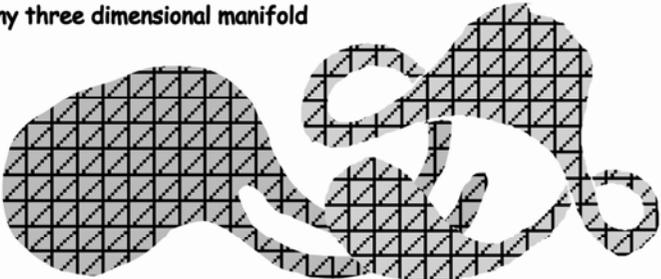
la formazione di singolarità può rivelare la decomposizione congetturata da Thurston?

Grigoriy Perelman 2002-3

Dimostrazione della Congettura di geometrizzazione

- [P1] G. Perelman, The **entropy** formula for the Ricci flow and its geometric applications, [arXiv.org](https://arxiv.org/abs/2002.11587), November 11, 2002
- [P2] G. Perelman, Ricci flow with **surgery** on three-manifolds, [arXiv.org](https://arxiv.org/abs/2003.07321), March 10, 2003
- [P3] G. Perelman, **Finite extinction time** for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, [arXiv.org](https://arxiv.org/abs/2003.07321), July 17, 2003

So take any three dimensional manifold



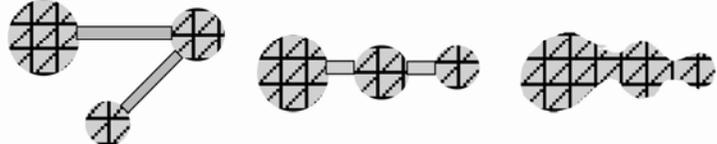
and warp it using the Ricci Flow cutting all singular strands that form until the process stops.



You will end up with collection of constant curvature spaces which are well understood.



Each piece must be a compact simply connected manifold of constant curvature, which can easily be shown to be a sphere.



Putting the original manifold back together using connecting tubes, we see it was diffeomorphic to a three dimensional sphere. QED

Christina Sormani, Lehman College

March 18, 2010. *The Clay Mathematics Institute hereby awards the Millennium Prize for resolution of the Poincaré conjecture to Grigoriy Perelman.*

The Millennium Prize Problems

Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture It was the **1901 paper of Poincaré** that started the modern theory of rational points on curves and that first raised questions about the minimal number of generators of $C(Q)$ [...]

Hodge Conjecture [...] If Z is a closed analytic subspace of X , of complex codimension p , Z is an integral curve and, by **Poincaré duality**, defines a class $cl(Z)$ in $H^{2p}(X, \mathbb{Z})$.

Hodge Conjecture. On a projective non-singular algebraic variety over \mathbb{C} , any Hodge class is a rational linear combination of classes $cl(Z)$ of algebraic cycles.

Navier-Stokes Equations

P vs NP

Poincaré Conjecture (solved: Grigoriy Perelman, 2002-3)

Riemann Hypothesis

Yang-Mills Theory

II Punti Omoclini

il 21 gennaio 1889 re Oscar II di Svezia festeggia il suo 60° compleanno;

1885 annuncio del premio

Comitato esaminatore: Karl Weierstrass
Charles Hermite
Gosta Mittag-Leffler (*Acta Mathematica*)

Problema in meccanica celeste (Weierstrass):

Indagare la possibilità di rappresentare le soluzioni del problema dei n-corpi, in assenza di collisioni, usando serie di funzioni note del tempo che convergano uniformemente sull'intero asse reale.

Ma se il problema proposto non può essere risolto entro il tempo concesso, il premio sarà assegnato a un lavoro in cui un altro problema di meccanica sia studiato e completamente risolto nel modo indicato

Vengono segnalati come migliori:

P.E. Appel, Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions Abéliennes en séries trigonométriques

J.H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique

Commento di Weierstrass:

Questo articolo - è vero - non può essere considerato una soluzione del problema posto dalla competizione, ma è così significativo che mi sono convinto che la sua pubblicazione segnerà l'inizio di una nuova era nella storia della meccanica celeste.

[...] anche quando più di due corpi, mutuamente attrattenti in accordo con la legge di Newton o ogni altra legge, si muovono così che la distanza tra loro resti sempre limitata, **possono ancora esistere tipi di moto che finora avremmo a fatica immaginato, e per i quali non conosciamo alcuna appropriata espressione analitica [...].**

Introduction.

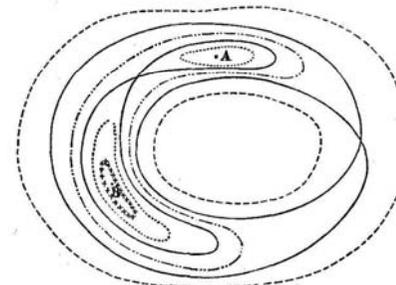
Le travail qui va suivre et qui a pour objet l'étude du problème des trois corps est un remaniement du mémoire que j'avais présenté au Concours pour le prix institué par Sa Majesté le Roi de Suède. Ce remaniement était devenu nécessaire pour plusieurs raisons. Pressé par le temps, j'avais dû énoncer quelques résultats sans démonstration; le lecteur n'aurait pu, à l'aide des indications que je donnais, reconstituer les démonstrations qu'avec beaucoup de peine. J'avais songé d'abord à publier le texte primitif en l'accompagnant de notes explicatives; mais j'avais été amené à multiplier ces notes de telle sorte que la lecture du mémoire serait devenue fastidieuse et pénible.

J'ai donc préféré fondre ces notes dans le corps de l'ouvrage, ce qui a l'avantage d'éviter quelques redites et de faire mieux ressortir l'ordre logique des idées.

Je dois beaucoup de reconnaissance à M. PHRAGMÉN qui non seulement a revu les épreuves avec beaucoup de soin, mais qui, ayant lu le mémoire avec attention et en ayant pénétré le sens avec une grande finesse, m'a signalé les points où des explications complémentaires lui semblaient nécessaires pour faciliter l'entière intelligence de ma pensée. Je lui dois la forme élégante que je donne au calcul de S_i^n et de T_i^n à la fin du § 12. C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.

J'ai représenté par un trait pointillé ----- les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1 > -\varphi_4$.

Fig. 7.



J'ai représenté par le trait mixte une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$.

Pour $C_1 = -\varphi_3$ l'une de ces deux branches se réduit à un point représenté sur la figure en A, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $y_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée sur la figure par le trait $\times \times \times \times \times$.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Volume 3, 1899

3° L'arc A_0A_1 coupe l'arc B_0B_1 . — (Ce cas contient comme cas particulier celui où la courbe K serait fermée.) Nos courbes présentent alors l'aspect de la *fig. 3*.

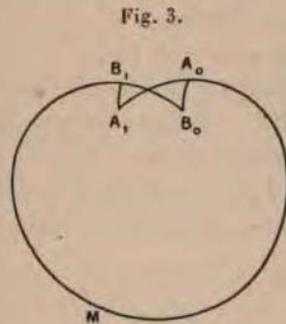
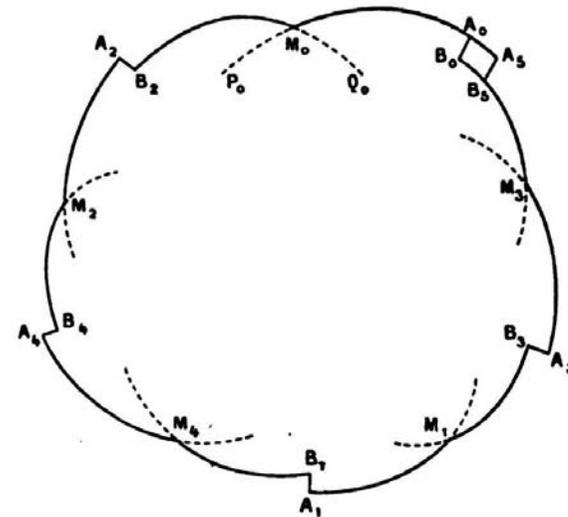


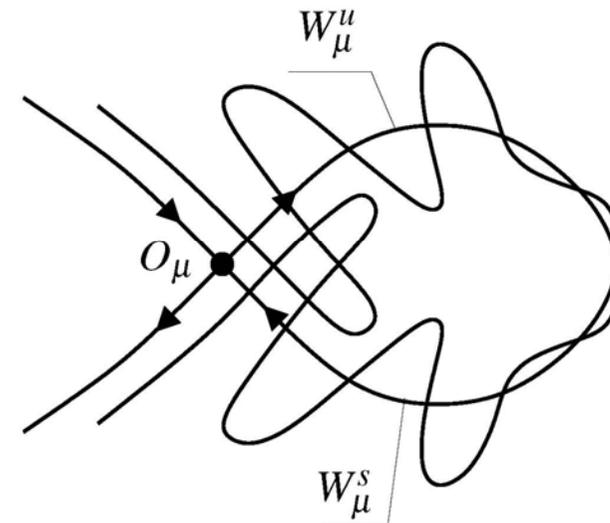
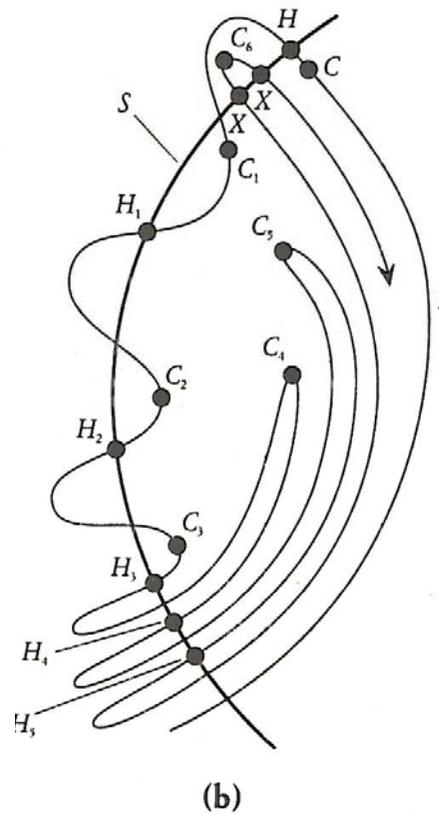
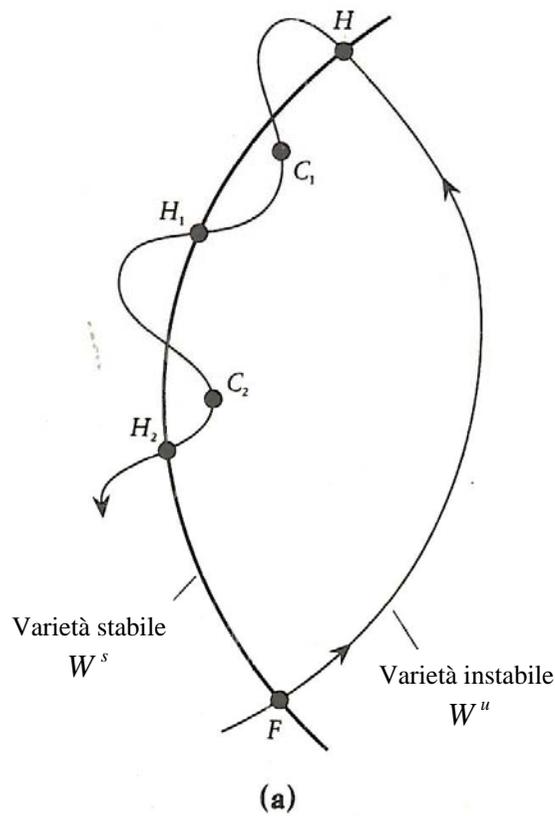
Fig. 7.



397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

Le orbite omocline: "il genio è uscito dalla lampada" L.P.Shil'nikov



Se una mappa bidimensionale ammette **un punto omocline** intersecato **trasversalmente** dalle varietà stabile e instabile di un punto fisso di tipo sella, allora ne ammette **infiniti**.

Poincaré assegna particolare valore ai **movimenti periodici**

“l'unica breccia attraverso la quale possiamo penetrare nel dominio che fu un tempo considerato inaccessibile”

Congettura: *I moti periodici stabili sono ovunque densi sulle superfici di livello compatte dell'Hamiltoniana.*

J. Hadamard, Sur des lignes géodésiques sur une surface de courbure constante négative, **1898**

Per la prima volta viene utilizzato il metodo della **descrizione simbolica** per analizzare un flusso geodetico: le geodetiche chiuse sono ovunque dense, hanno orbite omocline e, in ogni intorno di un'orbita periodica e di ogni sua traiettoria omocline, c'è un **insieme numerabile di orbite periodiche**.

“Qualcosa di simile avviene nei problemi della dinamica, in particolare in meccanica celeste?”

Il problema è che tutte le **orbite periodiche** di tale intorno sono **instabili**, dunque - per Poincaré - il loro ruolo per i problemi della dinamica non lineare non deve essere importante.

J.H.Poincaré, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, **1905**



G.D.Birkhoff, Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques (*Papal memoir*), **1935**

Per un diffeomorfismo analitico bidimensionale che conserva le aree e ammette un punto fisso sella O con un' orbita omocline Γ intersecata trasversalmente dalle varietà stabile e instabile di O ,

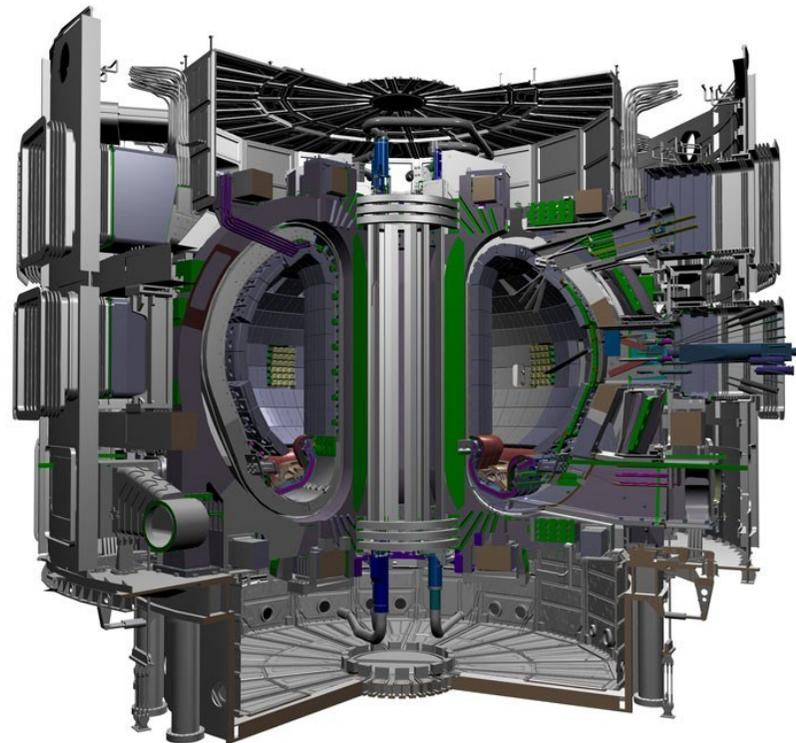
in ogni intorno della chiusura di Γ esiste un insieme numerabile di movimenti periodici di ogni periodo.

Il Tokamak

Andrei Sacharov, Igor Tamm, Igor Kurchatov , 1956

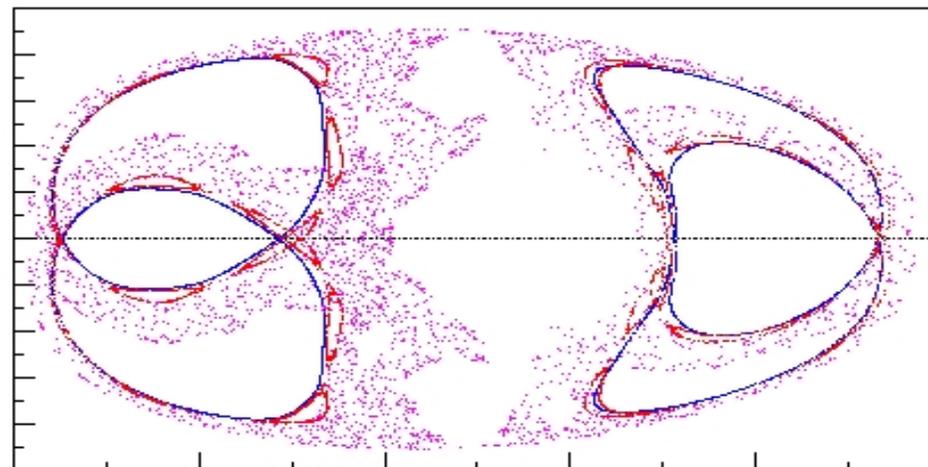
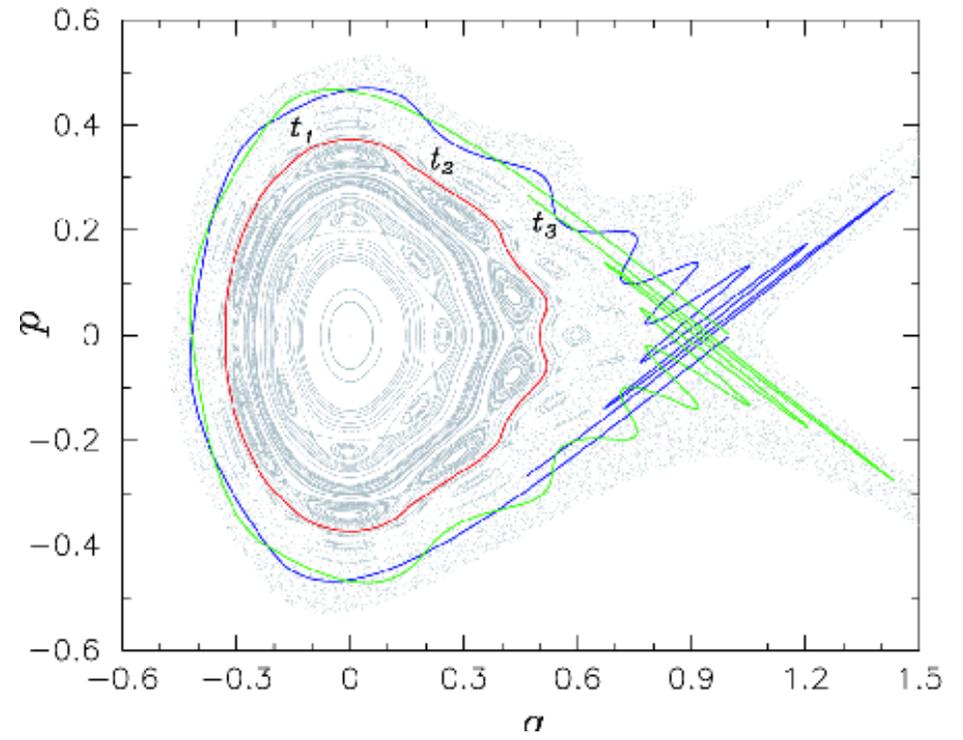
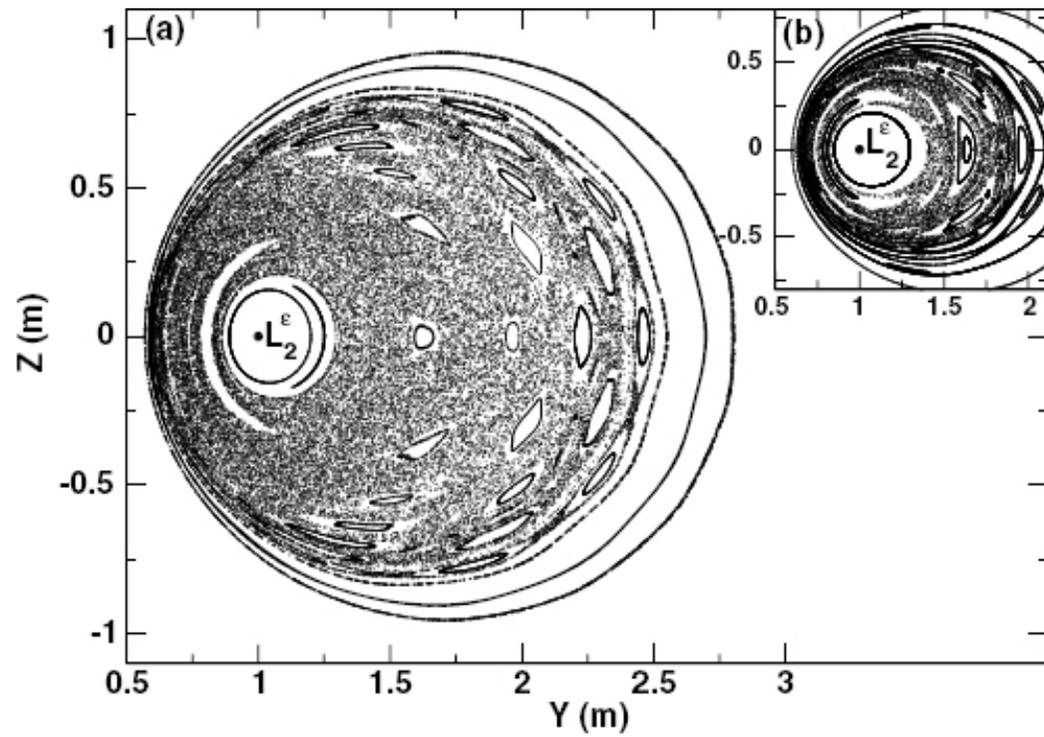
cfr. la vicenda del fisico Viktor Štrum in *Vita e destino* di Vasilij Grossman

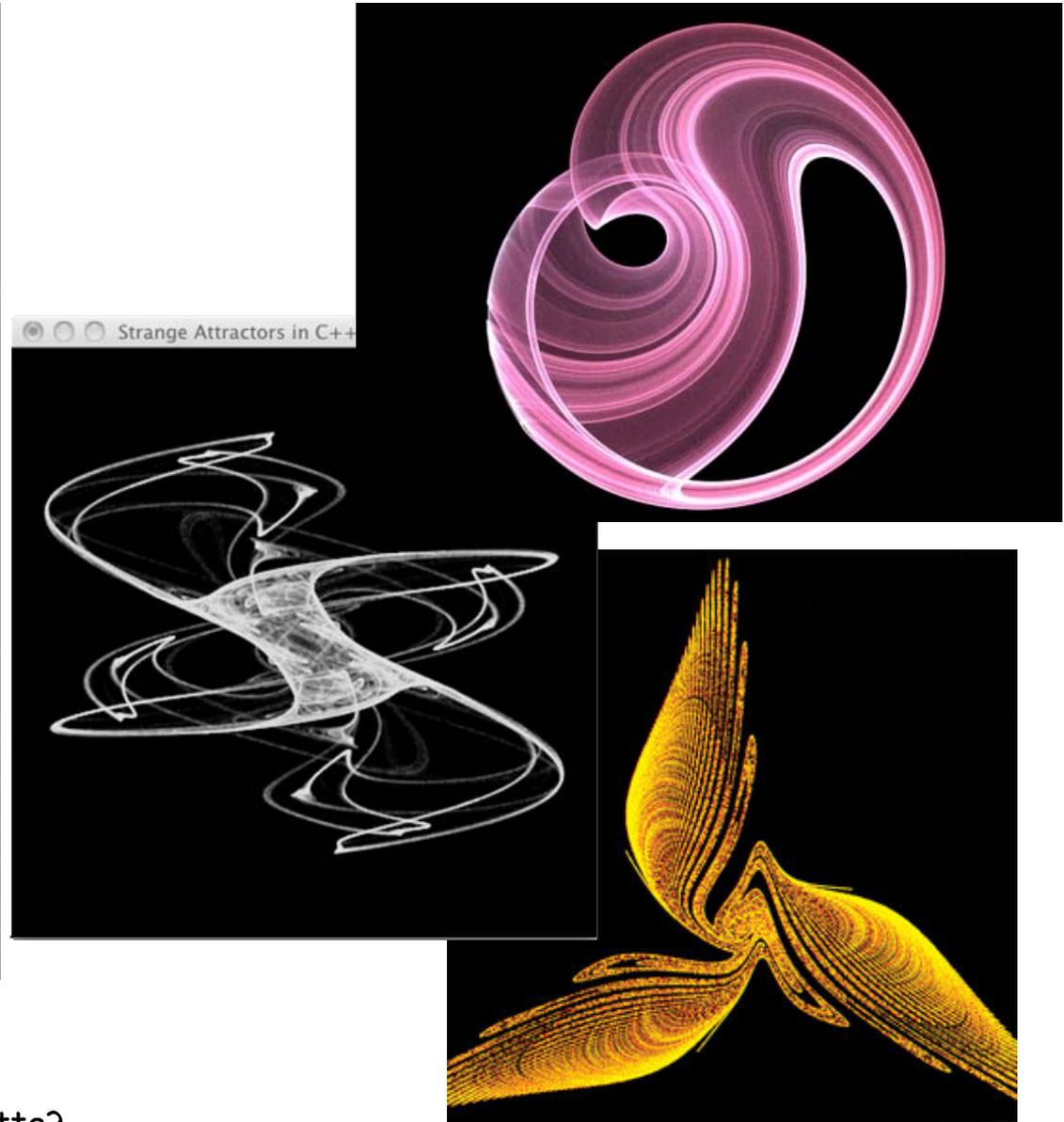
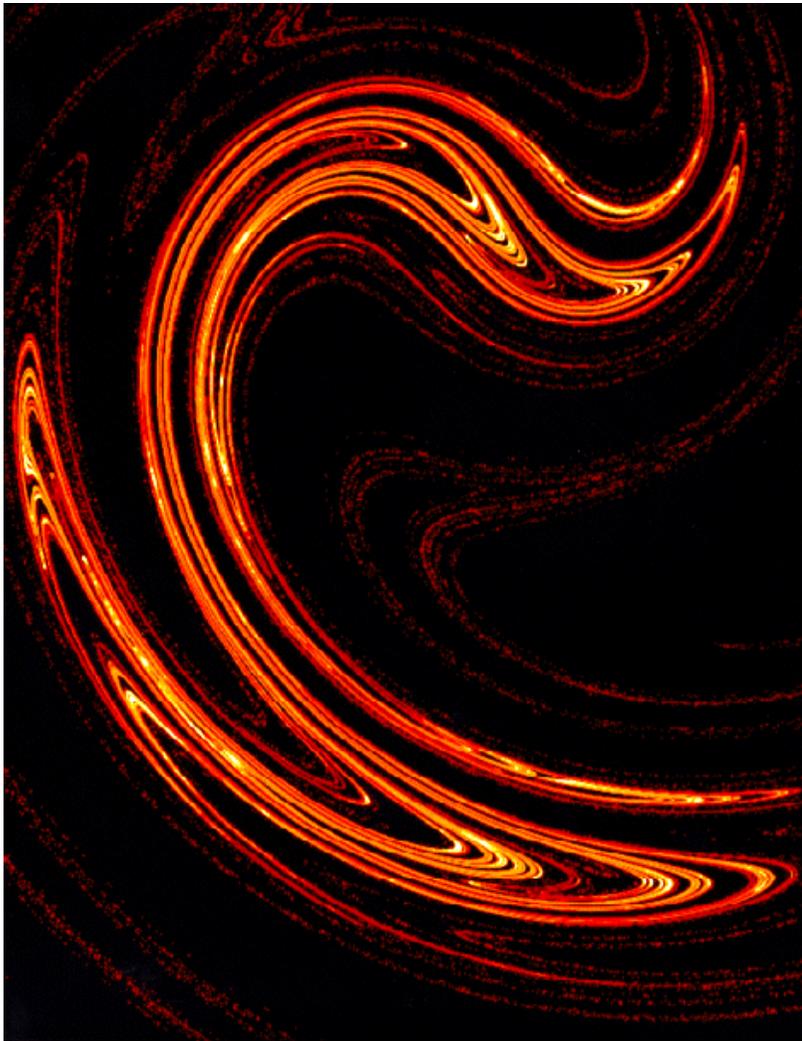
La struttura del campo magnetico non è generalmente integrabile e, in presenza di un'orbita omoclina, una particella carica può sfuggire attraverso la "crepa" formata dalle varietà stabile e instabile di un'orbita periodica sella, fino a collidere con la superficie interna del Tokamak



Formula di Mel'nikov 1963: stima la separazione tra le varietà.

Evidenza numerica post 1963

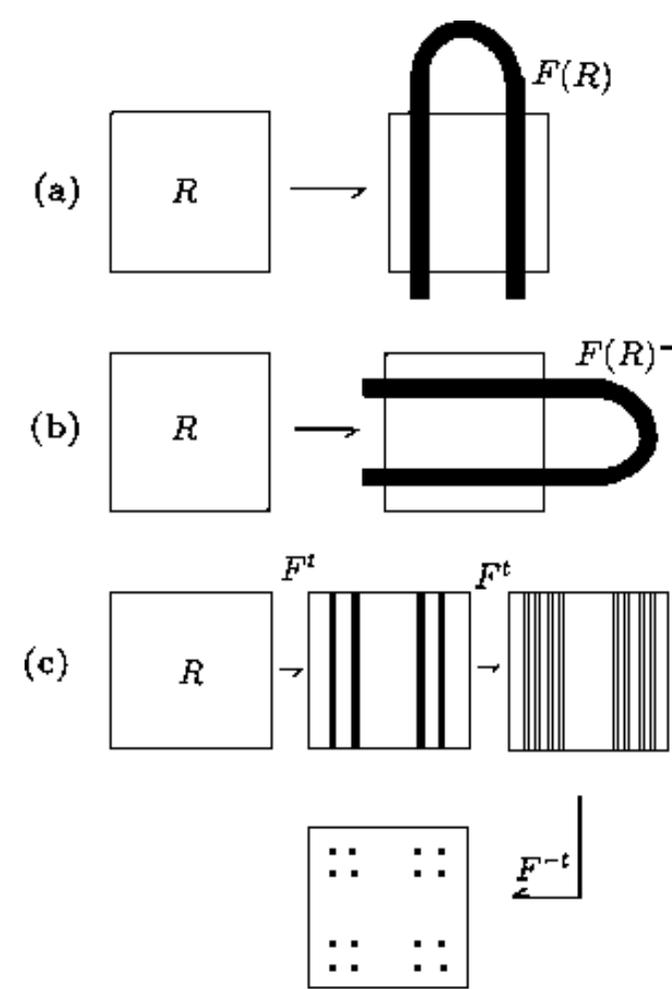
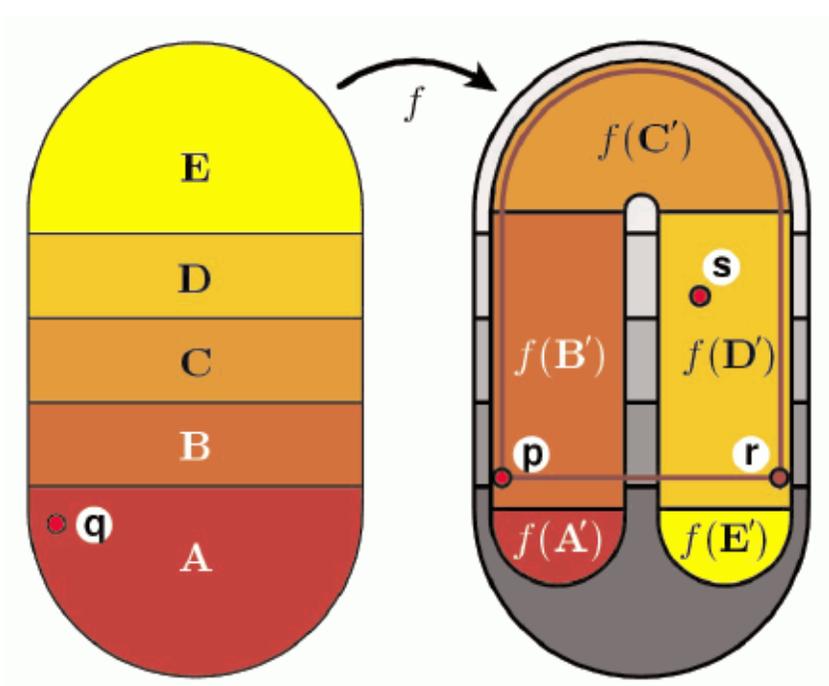




Si può ragionare bene su figure (troppo) ben fatte?

Il ferro di cavallo di S. Smale

Spagge di Rio de Janeiro 1961



contrazione orizzontale di un fattore $\rho < \frac{1}{2}$;

espansione verticale di un fattore $\lambda > 2$;

mappa f invertibile, lineare su B e D ;

l'insieme invariante (nonwandering set Λ) è l'intersezione di due insiemi di Cantor, uno verticale e uno orizzontale.

Esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di Λ e Σ , l'insieme di tutte le sequenze bi-infinite di simboli

$$s = \{\dots s_{-k} \dots s_{-1} \bullet s_0 s_1 \dots s_k \dots\} \quad s_i \in \{0,1\} \quad (B \rightarrow 0, D \rightarrow 1)$$

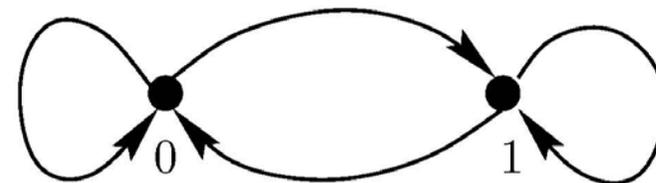
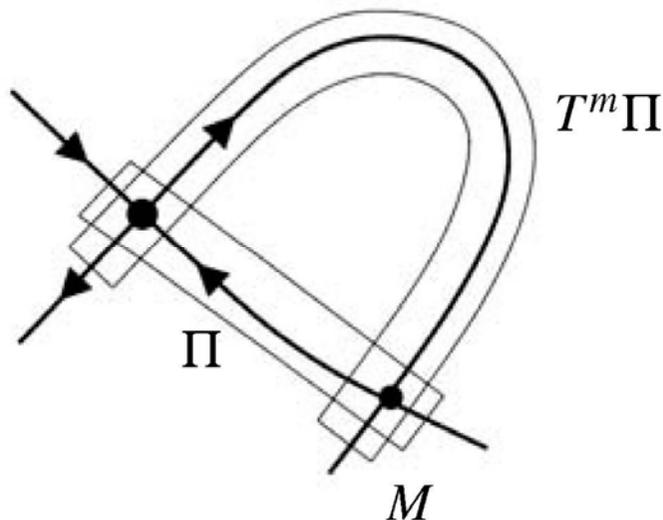
f su Λ è **topologicamente coniugata** con la **shift map** σ su Σ

Dallo studio della dinamica simbolica:

- Λ è **topologicamente transitivo** (esiste un'orbita **densa**)
- nell'insieme non errante i punti periodici di tipo sella e quelli omoclini formano un **insieme numerabile denso**
- si ha **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**

Il ferro di cavallo di Smale è **strutturalmente stabile**

Orbita omoclina M : T^m agisce su Π come un **ferro di cavallo**: esiste in Π un insieme invariante sul quale T^m è coniugata con **uno schema di Bernoulli a due simboli**

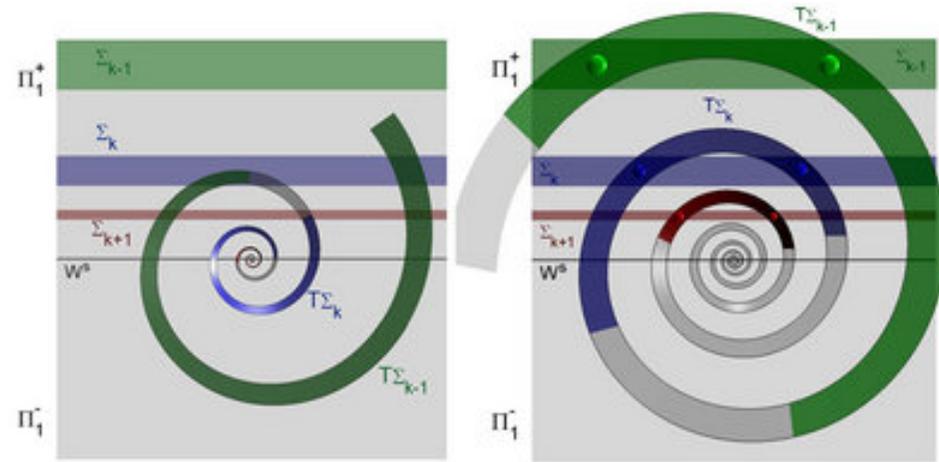
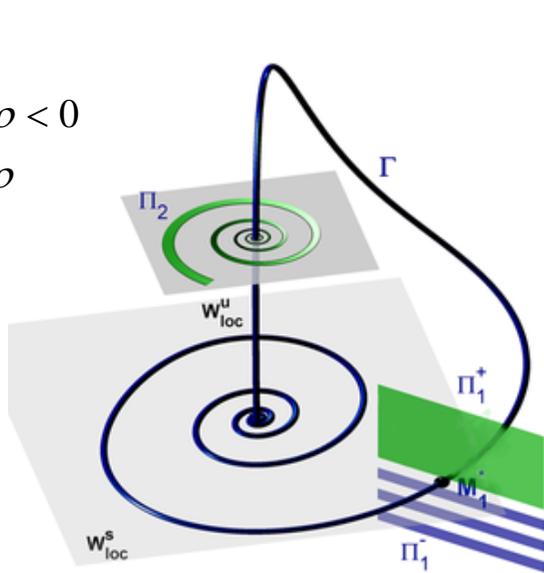


Traiettoria omoclina a un fuoco-sella, L.P. Shil'nikov

$$\lambda > 0$$

$$\rho \pm i\omega, \rho < 0$$

$$\sigma = \lambda + \rho$$

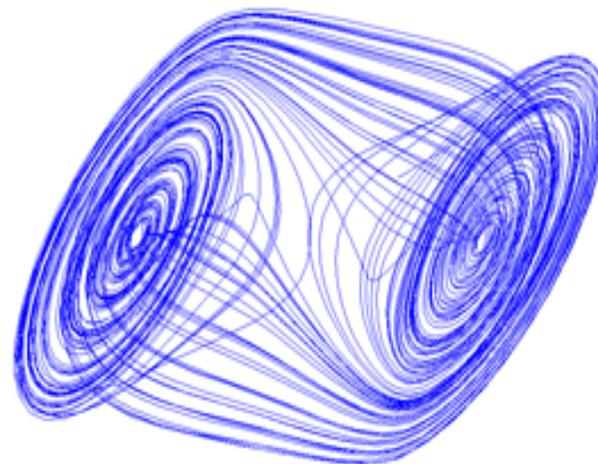
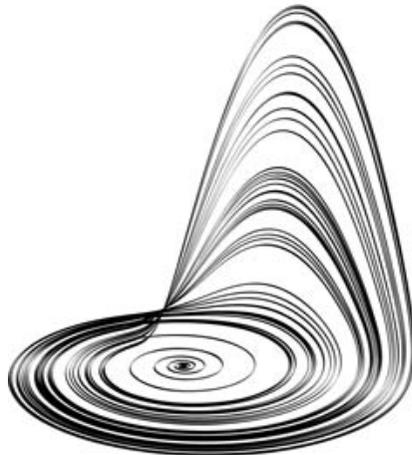


$$\sigma < 0$$

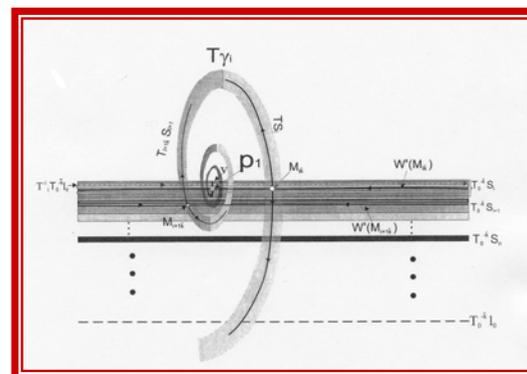
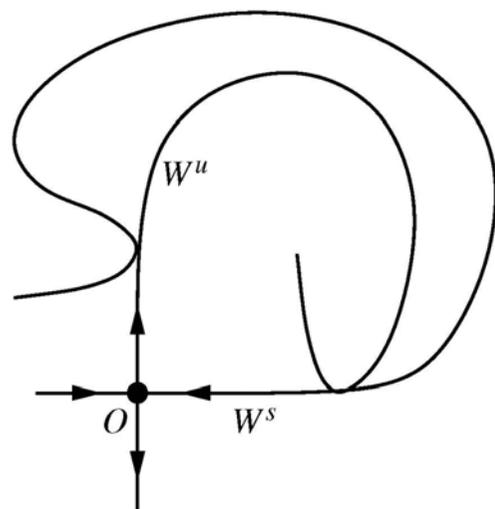
$$\sigma > 0$$

La mappa di Poincaré ha un'insieme numerabile di "ferri di cavallo di Smale"

1965 Se la quantità di sella $\sigma > 0$, in un intorno di Γ esistono *infinite orbite periodiche di tipo sella*



Tangenze omocline, S.E. Newhouse



1979 Sia X_μ una famiglia a un parametro di sistemi che presenti per $\mu = 0$ una **tangenza omoclina**.
Esiste una successione di intervalli che si accumulano a $\mu = 0$ nei quali
i valori del parametro corrispondenti a tangenze omocline sono densi.

Ogni tangenza omoclina può essere rimossa con una piccola perturbazione,
ma **non è possibile eliminarle tutte**

Dominio di Newhouse: dominio di **instabilità strutturale** nello spazio dei sistemi dinamici C^r
nel quale i sistemi con tangenze omocline sono densi

J.Palis, M.Viana 1994 Nei **domini di Newhouse** delle mappe n -dimensionali con $\dim W^u = 1$ e con
quantità di sella $\sigma < 1$ **i sistemi con un numero infinito di movimenti periodici stabili sono densi.**

S.V.Gonchenko et al. **1999** *Nell'insieme dei sistemi con tangenze omocline quadratiche (della terza classe) i sistemi con tangenze omocline di ogni ordine e i sistemi con un numero infinito di traiettorie periodiche di ogni ordine di degenerazione sono densi.*

La mappa di Poincaré (su una varietà centro) per una **traiettoria periodica degenerata** di ordine k ha la forma

$$\bar{x} = \pm x + l_{k+1} x^{k+1} + o(x^{k+1})$$

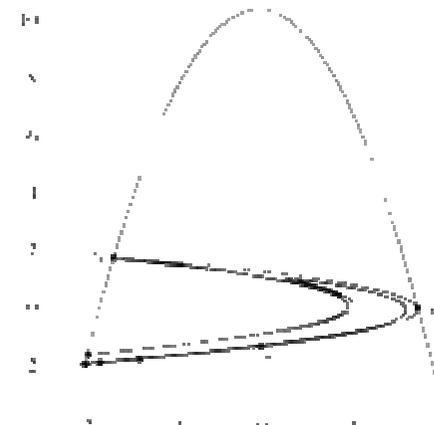
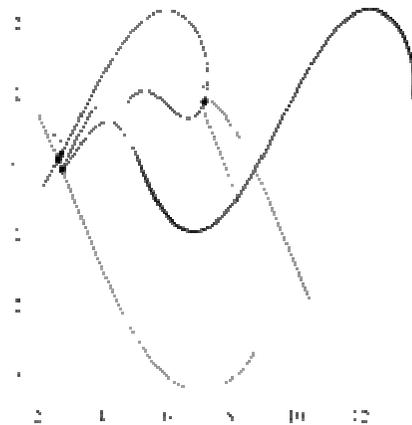
con i primi k coefficienti di Lyapunov $l_j = 0$. Il diagramma di biforcazione completo richiede k parametri.

Poiché si possono ottenere traiettorie degeneri di ogni ordine k , **una descrizione completa nel contesto delle famiglie dipendenti da un numero finito di parametri è impossibile.**

Le **tangenze omocline** (e i domini di Newhouse)

sono state trovate in praticamente tutte le famiglie con dinamica complessa

(perturbazioni di sistemi Hamiltoniani, mappa di Henon, attrattori di Chua, lingue di Arnol'd, period doubling)



Nella sua relazione sull'articolo di Poincaré presentato per la competizione, Weierstrass scrisse che i risultati ottenuti in esso distruggevano molte illusioni sulla dinamica dei sistemi Hamiltoniani.

*Questa fu la ragione essenziale per cui **i metodi qualitativi divennero quelli basilari nello studio della dinamica non lineare.***

Ora vediamo che è necessario sbarazzarsi dell'illusione che sia possibile ottenere una analisi qualitativa completa dei sistemi dinamici.

In entrambi i casi, la crisi fu causata dalle orbite omocline di Poincaré

L.P.Shil'nikov, *Homoclinic trajectories: from Poincaré to the present*

Nel passato ci sono stati profeti di sventura. Essi provavano piacere nel ripetere che tutti i problemi che potevano essere risolti lo erano già, e che dopo di loro non sarebbero rimaste che spigolature.

Già molte volte gli uomini hanno pensato di avere risolto tutti i problemi, o almeno di aver fatto un inventario di quelli che ammettono una soluzione.

E allora il significato della parola soluzione è stato esteso.

Per i greci una buona soluzione era quella che impiegava regolo e compasso; più tardi essa divenne quella ottenuta per radicali, in seguito quella nella quale apparivano soltanto funzioni algebriche e radicali.

I problemi insolubili sono diventati i più interessanti tra tutti, e altri mai sognati si sono presentati

H.Poincaré, *L'avenir des mathématiques*

III Sincronizzazione

Filosofia

Non vi è spazio assoluto e concepiamo solo movimenti **relativi**; [...]

Non vi è tempo assoluto; dire che due durate sono uguali è un'asserzione che di per se non ha senso alcuno e che può acquisirne uno solo per **convenzione**.

Non solo non abbiamo l'intuizione diretta dell'uguaglianza di due durate, ma non abbiamo nemmeno quella della **simultaneità** di due eventi che si producono in luoghi differenti; [...]

Infine, la nostra geometria euclidea non è che una sorta di convenzione linguistica .

Parigi 1900



Geodesia

Vediamo gli esperti della longitudine telegrafica all'opera e vediamo secondo quali **regole** essi ricerchino la **simultaneità**.

1897

Fisica

Suppongo che osservatori posti in differenti punti **regolino i loro orologi** con l'aiuto di segnali luminosi, che cerchino di correggere a loro volta questi segnali del tempo di trasmissione ma che, ignorando il movimento di traslazione di cui sono animati e credendo di conseguenza che i segnali si trasmettano con la stessa velocità nei due sensi, si limitino a incrociare le osservazioni, inviando un segnale da A in B, e poi un altro da B in A.

Il '**tempo locale**' [di Lorentz] è il tempo segnato dagli orologi così regolati.

Tutti i fenomeni che si produrranno, per esempio in A, saranno in ritardo, ma tutti lo saranno ugualmente, e l'osservatore non se ne accorgerà, poiché il suo **orologio ritarda**; così come vuole il **principio di relatività**, non vi sarà alcun modo di sapere se A sia in quiete o in movimento assoluto.

St Louis 1904

Convenzioni

Parigi maggio 1875 Convention du Mètre

Chicago novembre 1883 General Time Convention adozione della simultaneità basata sui fusi orari
(voto per migliaia di binari)

Washington ottobre 1884 Conferenza mondiale sul tempo: Greenwich meridiano fondamentale

Breteuil settembre 1889 Ratifica della convenzione e sepoltura del metro e del kilogrammo standard

9 marzo 1911 Parigi adotta il meridiano di **Greenwich**



Bureau des Longitudes

Membro del Bureau dal 1893 al 1912

Presidente nel 1899, 1909, 1910

1894 unificazione del giorno astronomico e nautico

1897 Segretario Commissione per la decimalizzazione del tempo e della circonferenza

1 ora=100 'minuti'; 1 'minuto'=100 'secondi'

1 'minuto'=36 sec; 1 'secondo'=0.36 sec

A. Cornu : il giorno l'unica unità naturale da decimalizzare

1/100 di giorno \approx 1 quarto d'ora

1/100000 di giorno \approx 0.86 sec (tipico battito cardiaco)

Un sistema di unità di misura

non può essere più vero di un altro;

può soltanto essere più semplice e comodo (!)

RAPPORT
SUR LES RÉSOLUTIONS DE LA COMMISSION
CHARGÉE DE L'ÉTUDE
DES PROJETS DE DÉCIMALISATION DU TEMPS
ET
DE LA CIRCONFÉRENCE

Archives du Bureau des Longitudes, p. 1-12.

Comparaison des divers systèmes.

Pour faciliter la comparaison des divers systèmes et pour faire apprécier dans quelle mesure ils satisfont aux différentes conditions, je donne pour chacun d'eux le tableau des trois coefficients de transformation.

Le premier coefficient est celui qui intervient dans le calcul des angles plus grands que 2π .

Le second est celui qui sert à la conversion des temps en arcs.

Le troisième est celui qu'on doit employer dans la conversion des documents anciens; c'est le rapport du degré ancien au degré nouveau.

Ces coefficients sont, bien entendu, débarrassés des puissances de 10.

Systèmes.	1 ^{er} coefficient.	2 ^e coefficient.	3 ^e coefficient.
100	1	24	36
200	2	12	18
400	4	6	9
240	24	1	15
360	36	15	1

Meridiani

1891-1902 continue iniziative per correggere la discrepanza tra la misurazione francese 9' 20.85" e britannica 9' 21.06" della differenza di longitudine tra **Parigi** e **Greenwich**

1895-97 rilevamento della longitudine di **Dakar** e **Saint-Louis**

1900-07 misurazione di un arco di meridiano - cinque gradi di latitudine - a **Quito** per stimare lo schiacciamento ai poli della Terra (estensione dell'analogica missione francese nel **1735**)

Poco dopo la sua morte, il nipote, Pierre Botroux, cercò appassionatamente, in una lettera a Mittag-Leffler, di individuare la meta principale che per tutta la vita aveva animato l'opera dello zio.

La cosa interessante è che egli non si rivolse alla matematica o alla fisica, bensì alla geografia. Boutrox raccontò come Poincaré **avesse sempre seguito con avido interesse le storie di viaggi ed esplorazioni**; sia nella scienza sia fuori di essa, l'intero suo lavoro era caratterizzato da un impulso irresistibile a **"colmare le lacune nella mappa del mondo"**.

P.Galison, *Gli orologi di Einstein, le mappe di Poincaré*



Piero Savorgnan di Brazza fotografato da Nadar

Radio Eiffel

ACADÉMIE DES SCIENCES.

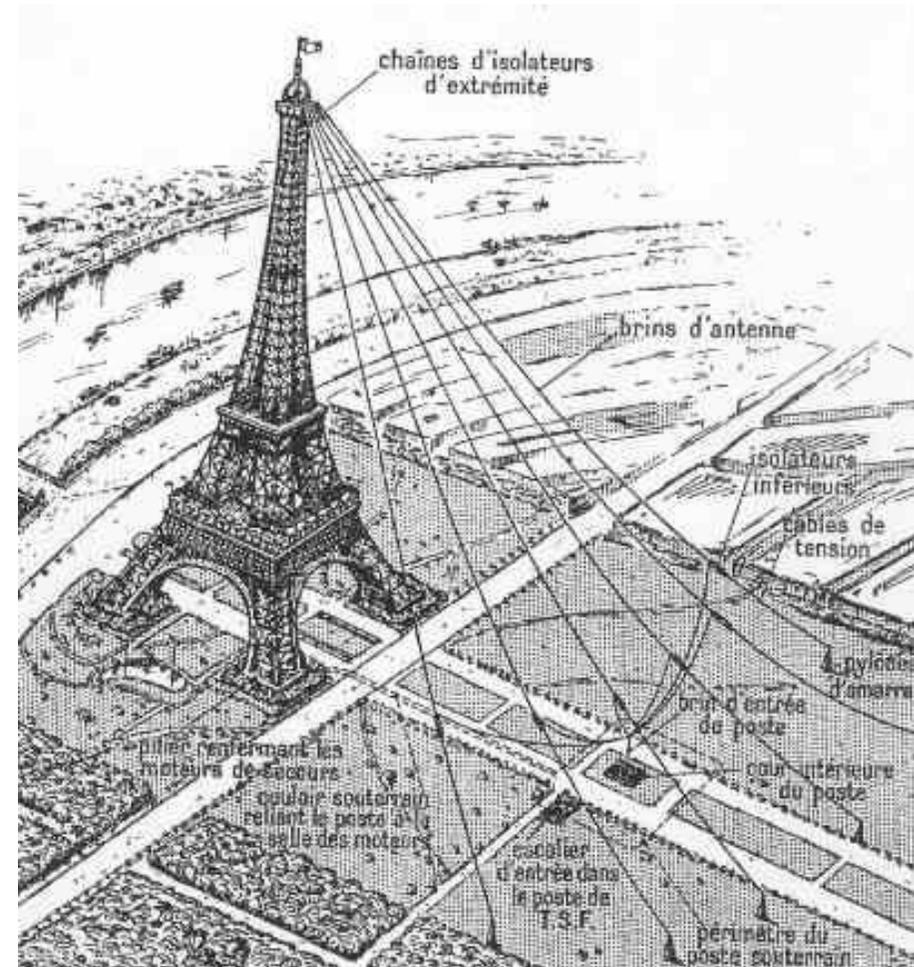
SÉANCE DU LUNDI 21 NOVEMBRE 1910.

PRÉSIDENTE DE M. ÉMILE PICARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. H. POINCARÉ, au nom du Bureau des Longitudes, fait connaître à l'Académie que l'Observatoire de Paris et le poste central de télégraphie sans fil de la tour Eiffel ont commencé aujourd'hui, 21 novembre, *l'envoi de l'heure à onze heures du matin*. Les signaux horaires sont émis par la pendule à onze heures zéro minute, onze heures deux minutes, onze heures quatre minutes. Ils sont précédés des mêmes signaux d'avertissement qu'à minuit zéro, minuit deux et minuit quatre. L'envoi a lieu à minuit tous les jours sans exception; à onze heures du matin, tous les jours sauf les dimanches et jours fériés.



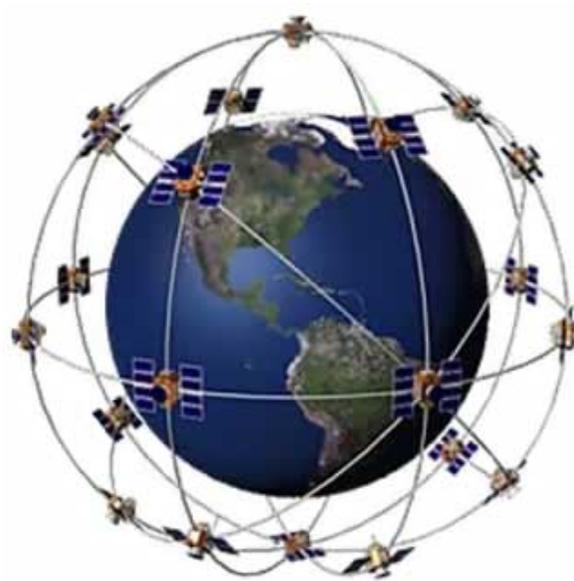
LORAN, Transit, GPS

24 orologi sincronizzati

Precisione del **GPS**: 50×10^{-9} sec al giorno

Correzioni relativistiche: ritardo dovuto alla velocità 7×10^{-6} sec
anticipo dovuto alla distanza orbitale 45×10^{-6} sec

Senza le correzioni: **errore** di quasi **10 km** al giorno



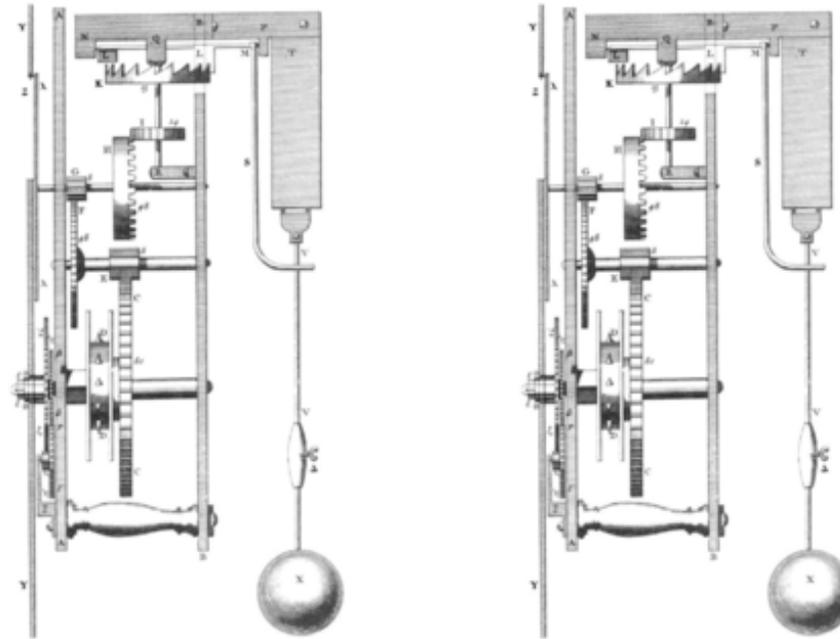
In questo caso l'eredità di Poincaré non ha carattere **carsico**:
i commerci e le guerre non prevedono fasi di **occultamento**

1657 Christiaan Huygens è in navigazione per conto della **Royal Society**:

Ho percepito uno strano tipo di accordo in questi orologi sospesi uno accanto all'altro

Horologium oscillatorium, sive, de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae, 1658

partendo da condizioni iniziali qualunque, gli orologi, dopo un certo periodo di tempo,
si trovavano sempre ad oscillare in controfase



1707 Naufragio al largo delle isole **Scilly**

1714 Longitude Act 20000 pounds

cfr. La storia dell'orologiaio **John Harrison** in **Longitudine** di **Dava Sobel**

Sincronizzazione classica

Sincronizzazione di un oscillatore con una forzante periodica $u(t)$, entità dell'accoppiamento ε

" " in fase e in frequenza ;

$$\phi(t) - \phi_u(t) = \text{const}, \quad \omega = \omega_0$$

" " di ordine $n:m$;

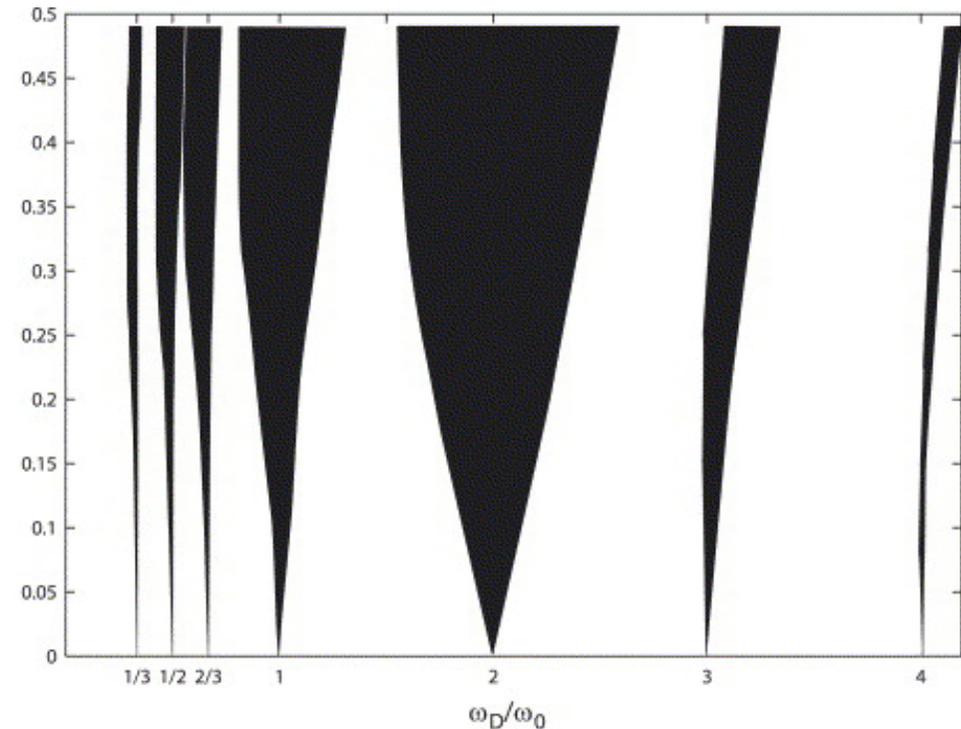
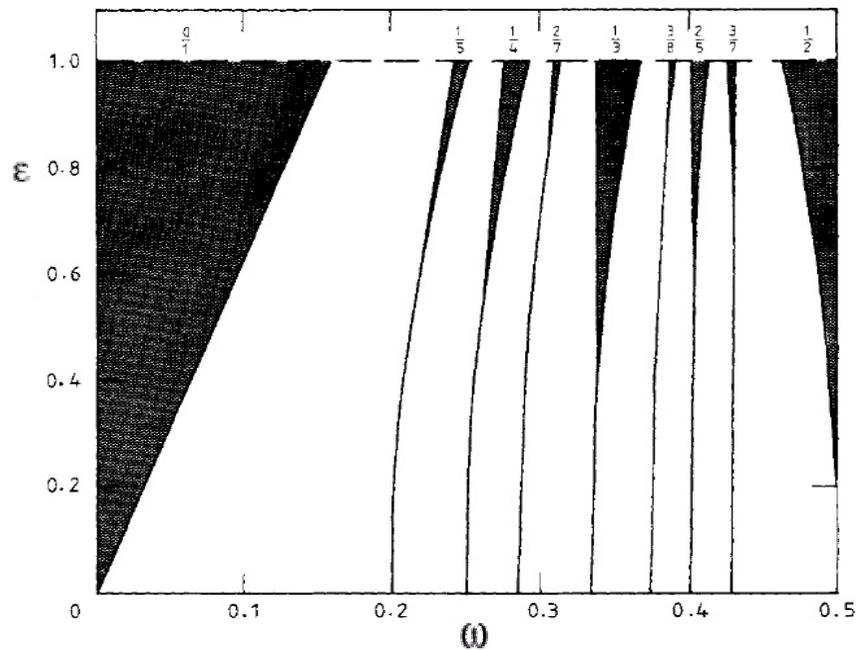
$$n\phi(t) - m\phi_u(t) = \text{const}, \quad n\omega = m\omega_0$$

Sincronizzazione di due oscillatori periodici

$$n\phi_1(t) - m\phi_2(t) = \text{const}, \quad n\omega_1 = m\omega_2$$

Moti **quasi periodici**/ **periodici**: orbite **dense**/**chiuse** su toro

Lingue di Arnold



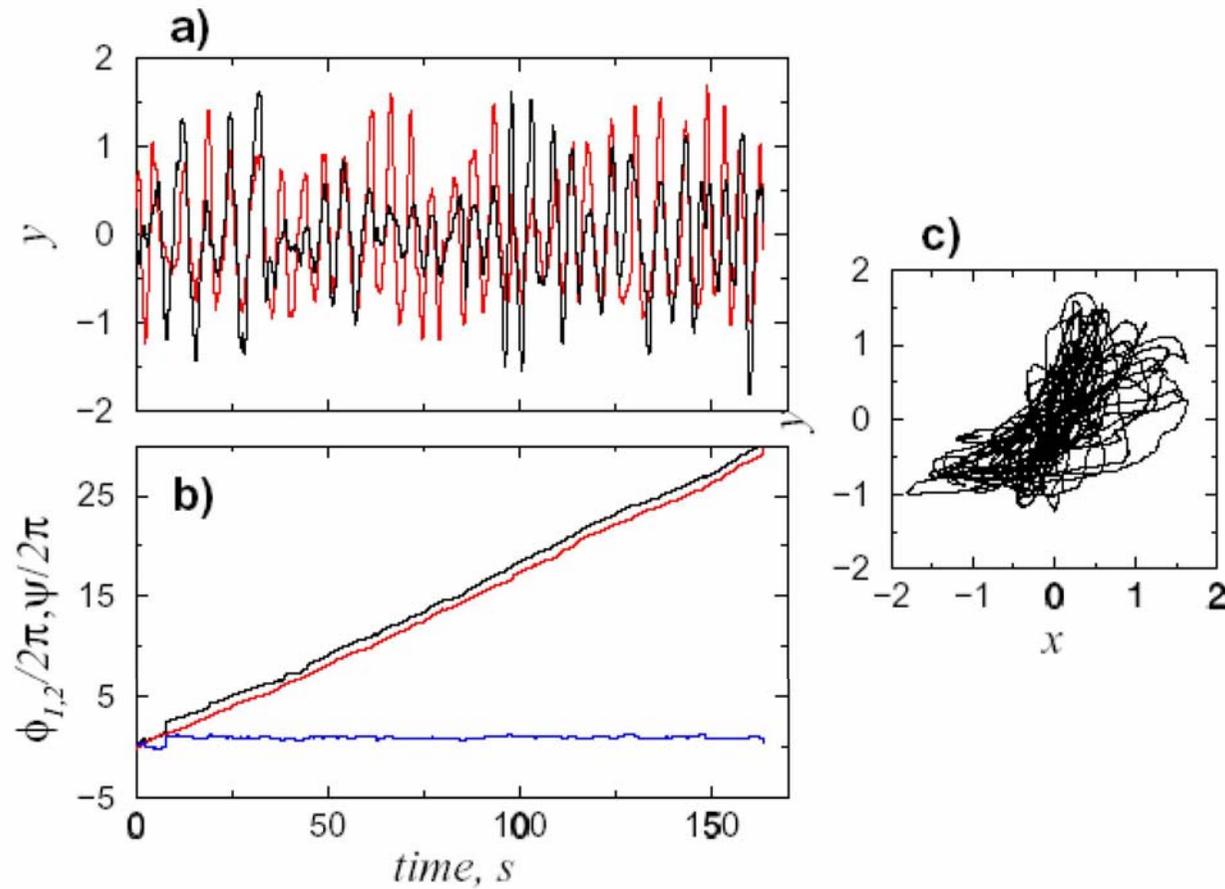
Sincronizzazione caotica

Sincronizzazione di fase di un oscillatore caotico con una forzante periodica $|\phi(t) - \phi_u(t)| < c \Leftrightarrow \omega = \omega_u$

$$\left(\text{posto } \omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t} \right)$$

Sincronizzazione di due oscillatori caotici

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \text{const} \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$$



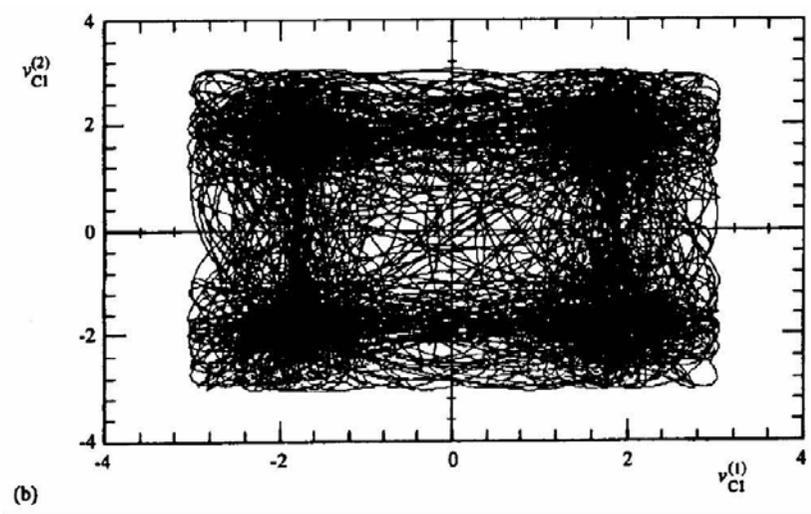
Sincronizzazione completa

$x'(t)$, $x''(t)$ variabili di stato di due sistemi dinamici identici
in regime caotico che interagiscono

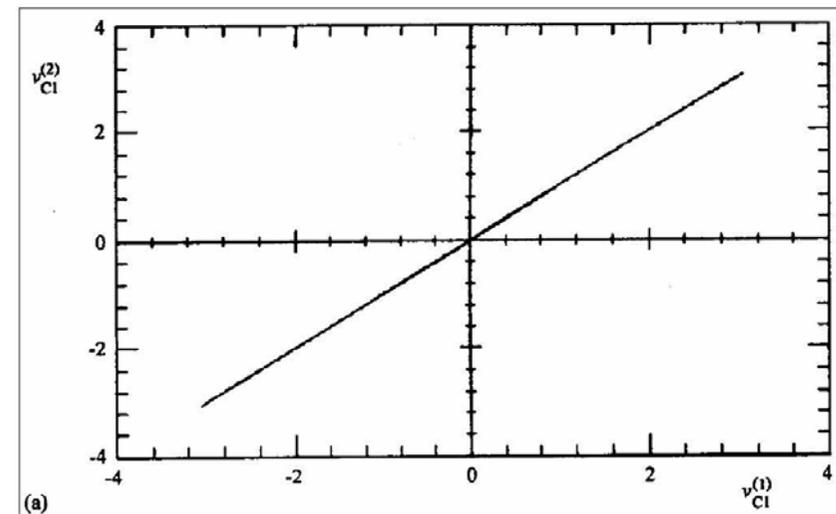
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t) - x''(t)\| = 0$$

lo stato sincronizzato $x'(t) = x''(t)$ **è localmente asintoticamente stabile**

Esiste un valore critico k_c del parametro di accoppiamento k oltre il quale si ha sincronizzazione completa



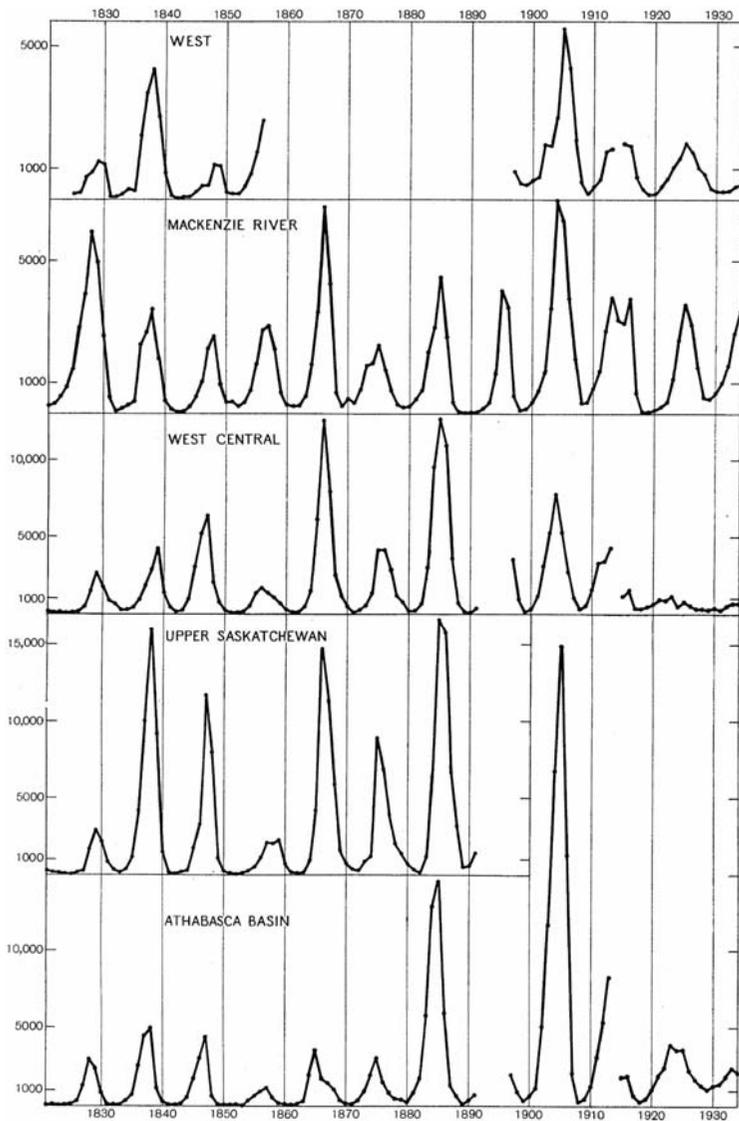
$$k < k_c$$



$$k > k_c$$

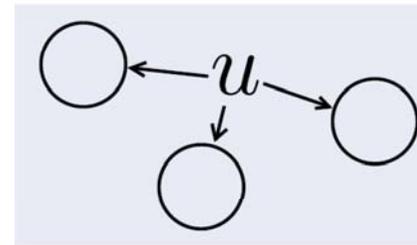
Interessante per la **crittografia** e la **trasmissione sicura dei dati** L.M.Pecora & T.L.Carroll 1990, 1998

Linci & Co

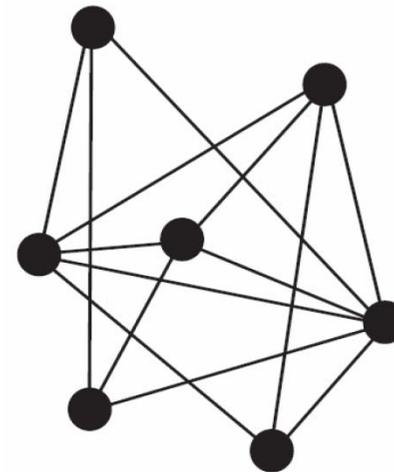


Elton & Nicholson 1942

Effetto Moran fluttuazioni ambientali comuni possono causare la sincronizzazione di comunità isolate



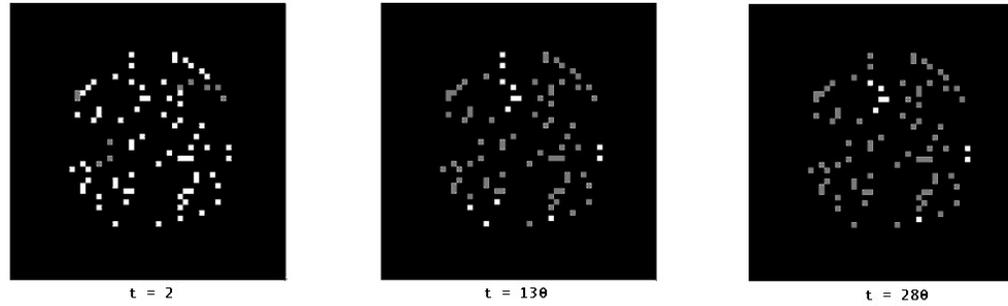
Sincronizzazione via diffusione



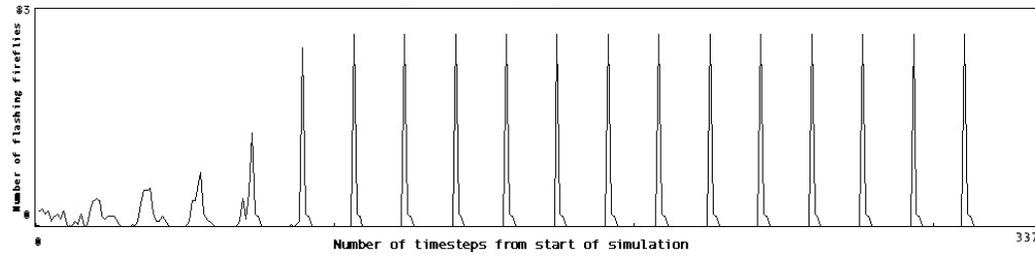
F. Dercole et al 2006

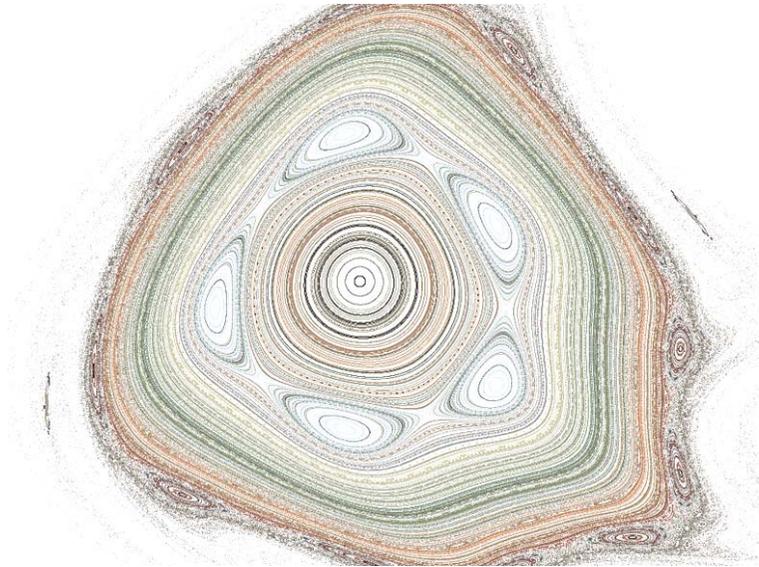
Lucciole e stormi (di stormi)

Portraits of simulated firefly group at 3 time points



Plot of increasing firefly synchronization with time





a Marco Brunella

Varese 1964 - Rio de Janeiro 2012