Exploring Math: la bellezza delle curve parametriche

(e la loro utilità)

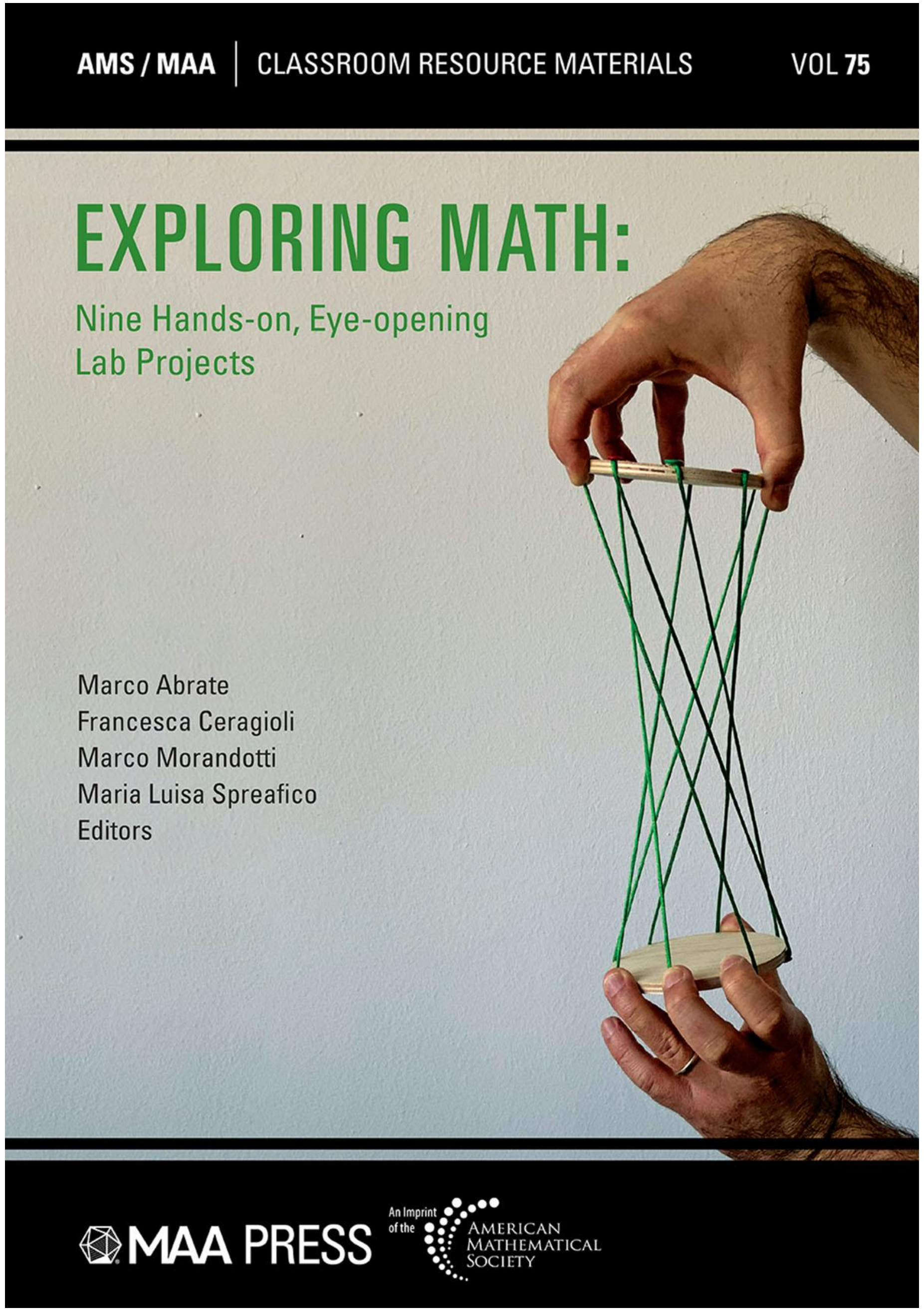
Marco Abrate e Francesca Ceragioli

La. M. Po.

Politecnico di Torino

1859

Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"

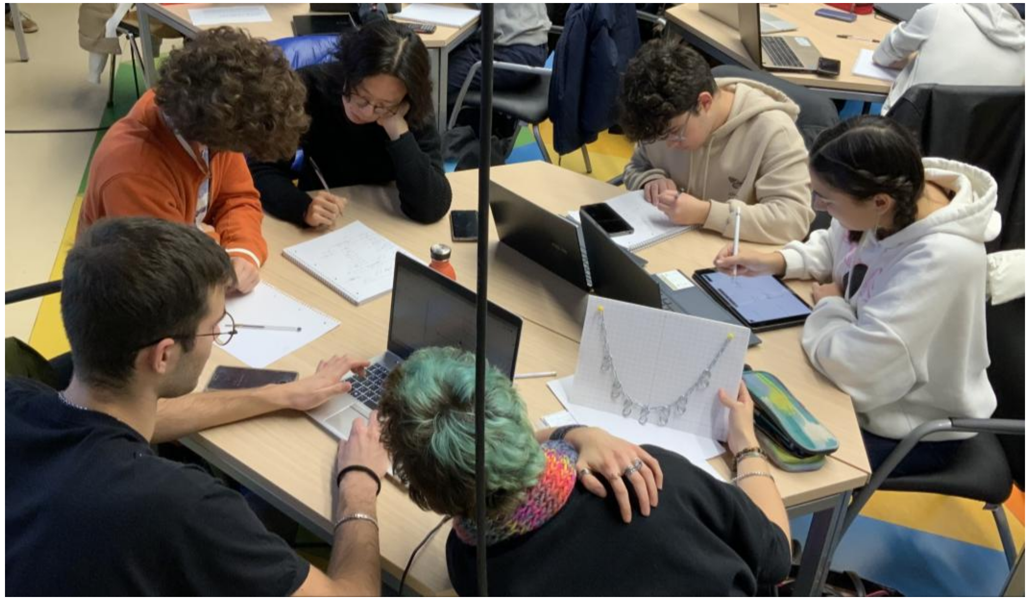


1. Reflecting on mathematical language through paper folding - F. Ceragioli, M.L. Spreafico
2. Logarithmic scales and the slide rule - M. Abrate
3. Minimum and maximum problems in nature – L. Lussardi
4. Bridges and calculus - F. Ceragioli, A. Falocchi, F. Marcon
5. Matrix, at the core of the web - L. Damonte, L. Massai
6. Billiards, dynamical systems, and fractals – M. Morandotti
7. Plane curves and how to trace them – A. Abrate, M.L. Spreafico
8. A quick look at surfaces – F. Ceragioli, M.L. Spreafico
9. Math & maps: The role of mathematics in drawing and coloring maps – A. Boralevi

Il laboratorio di Matematica: anche all'università?

- Collegamento con la realtà
- Motivazione studio matematica
- Costruzione dei concetti

- Attivazione studente
- Interazione tra pari e con professori



Il nostri laboratorio di Matematica

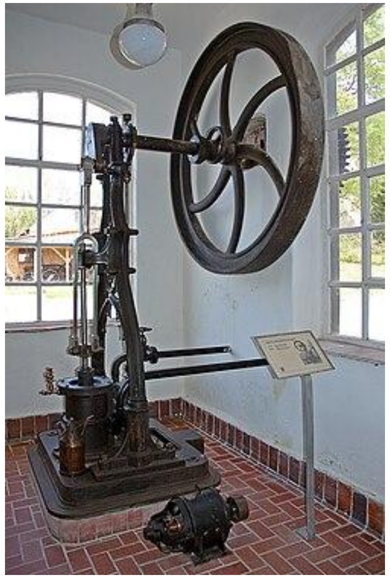
- Problema reale come spunto o come applicazione
- Uso di oggetti
- Collegamento coi contenuti dei corsi

- Parti teoriche sviluppate in forma dialogica
- Lavoro a gruppi
- Raccolta e discussione delle osservazioni dei gruppi

Come motiviamo lo studio di rette e circonferenze (e delle loro equazioni)?

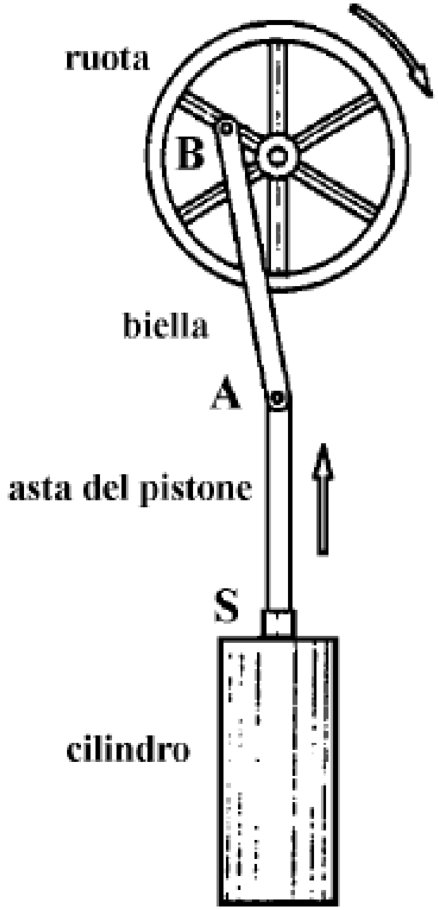
https://padlet.com/polito/come-motiviamo-lo-studio-di-rette-e-circonferenze-e-delle-lo-byws61vqfizxpiky

Movimenti rettilinei e circolari



Macchine per tracciare segmenti e circonferenze

Uno dei problemi che ha impegnato gli ingegneri tra il ‘700 e l’800 per la costruzione delle macchine a vapore è stato quello di trasmettere un moto di **traslazione** in un moto di **rotazione** e viceversa.



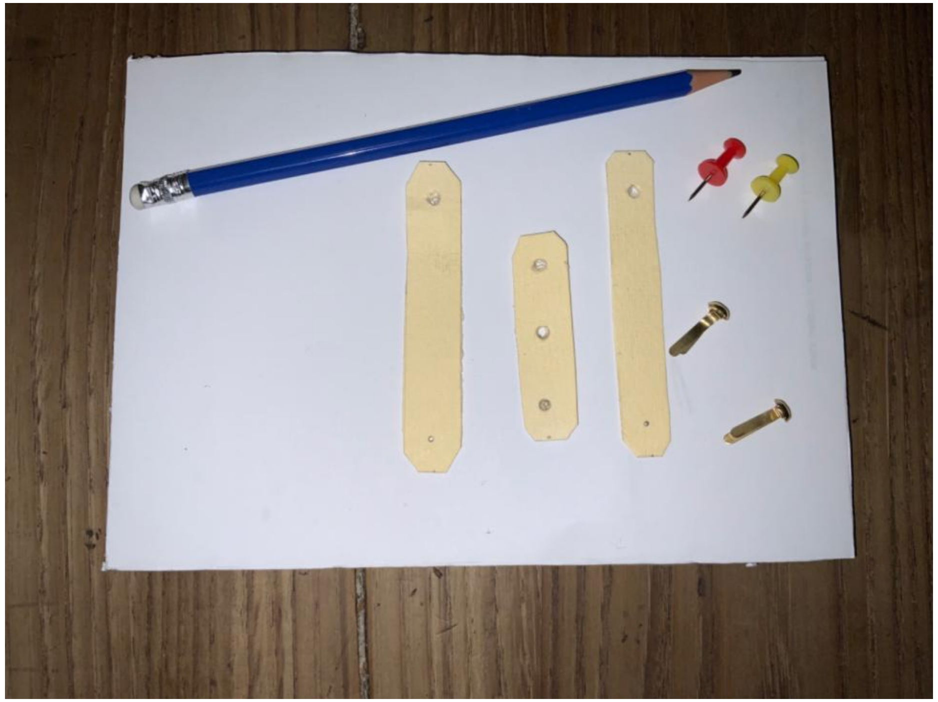
Collezione di cinematismi
(DIMEAS-Polito)

Modello di conduttore rettilineo con bilanciere a forcella in ferro

Modello di conduttore rettilineo triangolare secondo Reuleaux in ferro e ottone

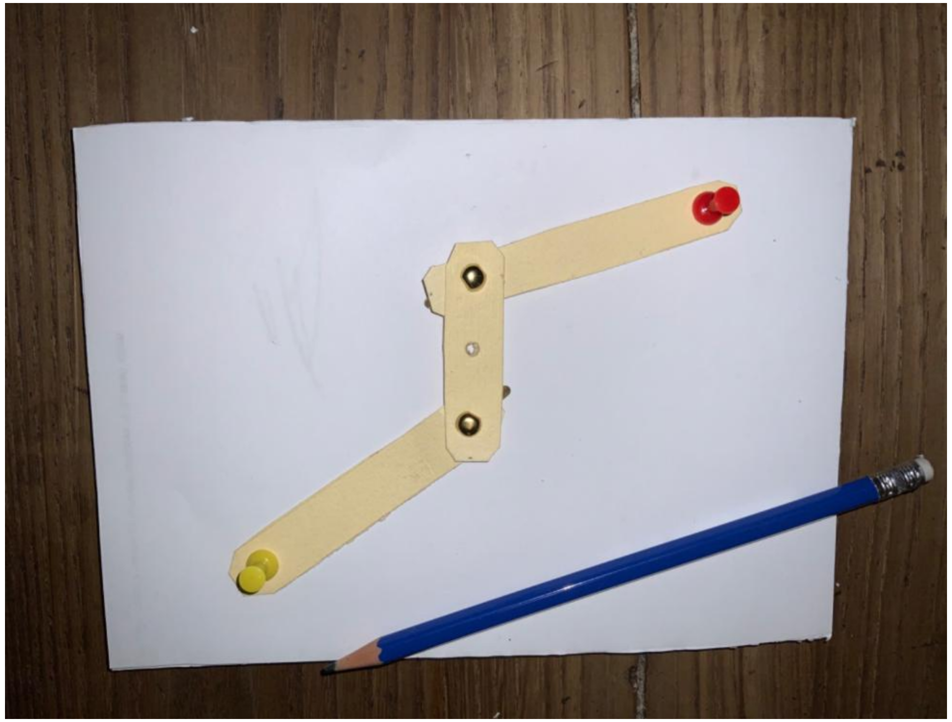
Modello di conduttore rettilineo con parallelogramma di Watt in ferro

Modellino - materiali



- tavoletta in poliplat
- 2 puntine
- 2 fermacampioni
- 2 strisce di cartoncino 9 x 1,5cm cm con un foro piccolo (per la puntina) ed un foro grande (per il fermacampioni) alle estremità
- 1 striscia di cartoncino con due fori (per i fermacampioni) alle estremità e un foro (per la matita) in mezzo

Modellino - istruzioni



Collegare le tre strisce di cartoncino con i fermacampioni fissati nei buchi più grandi, mettendo in mezzo quella più corta. Far ruotare i giunti perché si ammorbidiscano.

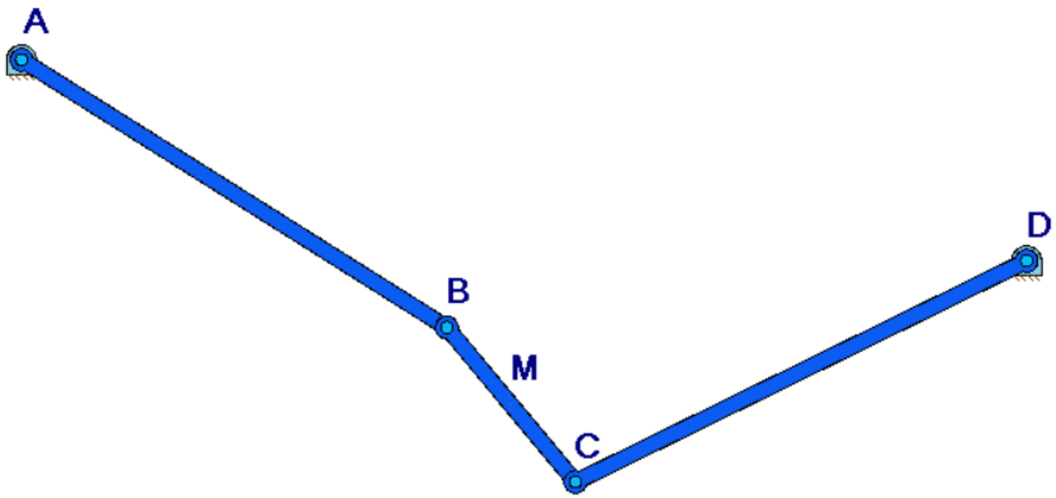
Fissare le due estremità delle strisce lunghe con le puntine alla tavoletta di poliplat in modo che siano alle estremità opposte della tavoletta.

Inserire la matita nel foro centrale e far scorrere il meccanismo.

Guida rettilinea di Watt

Tre aste incernierate con $AB \cong CD$

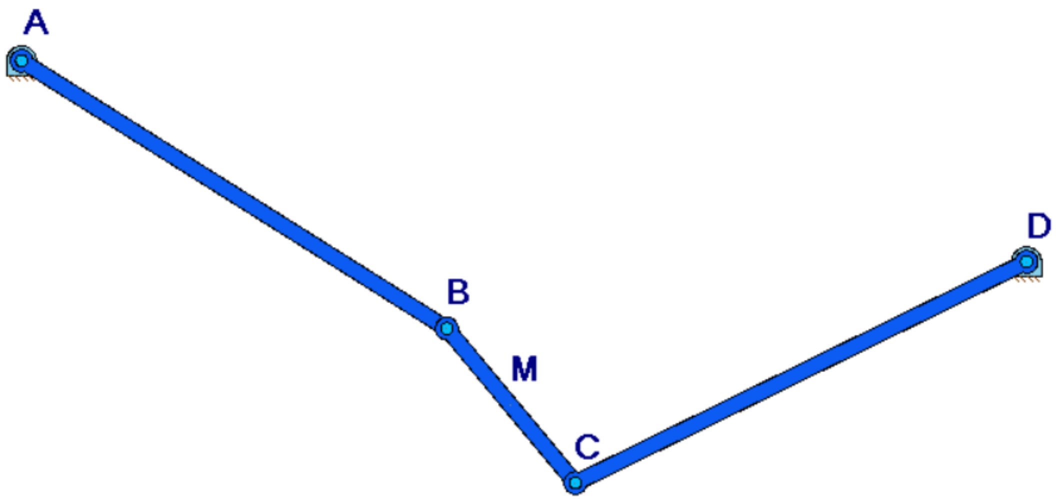
Il segmento è tracciato da M,
punto medio di BC

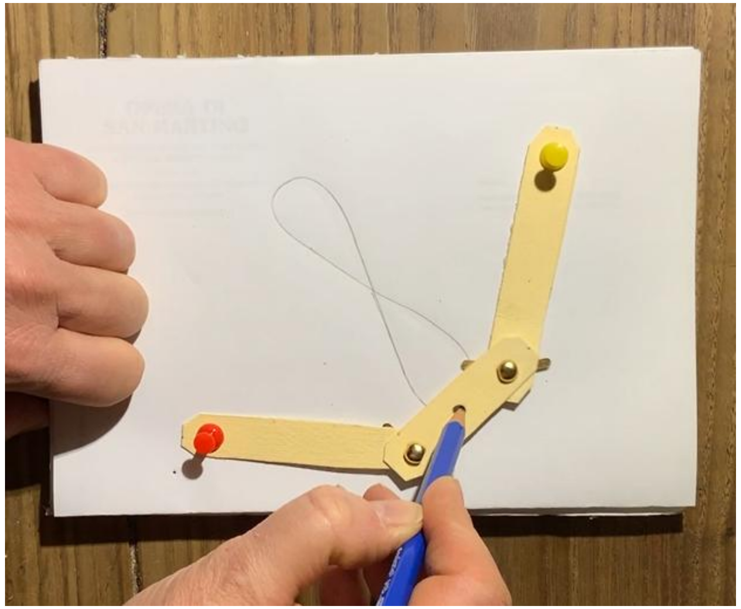


Guida rettilinea di Watt

Tre aste incernierate con $AB \cong CD$

Il segmento è tracciato da M,
punto medio di BC





M non descrive una retta!

La soluzione di Peaucellier (1864)

Sette aste articolate: quando un punto descrive un arco di circonferenza, un altro punto descrive un segmento.

.

Fondamenti matematici della guida di Peaucellier

Congruenze tra triangoli

La configurazione delle aste crea triangoli congruenti che garantiscono l'allineamento di alcuni punti del meccanismo

Similitudine e proporzioni

Si realizzano triangoli simili che mantengono rapporti costanti durante il movimento.

Proprietà della circonferenza

Alcune proprietà della circonferenza e considerazioni trigonometriche permettono ulteriori approfondimenti.

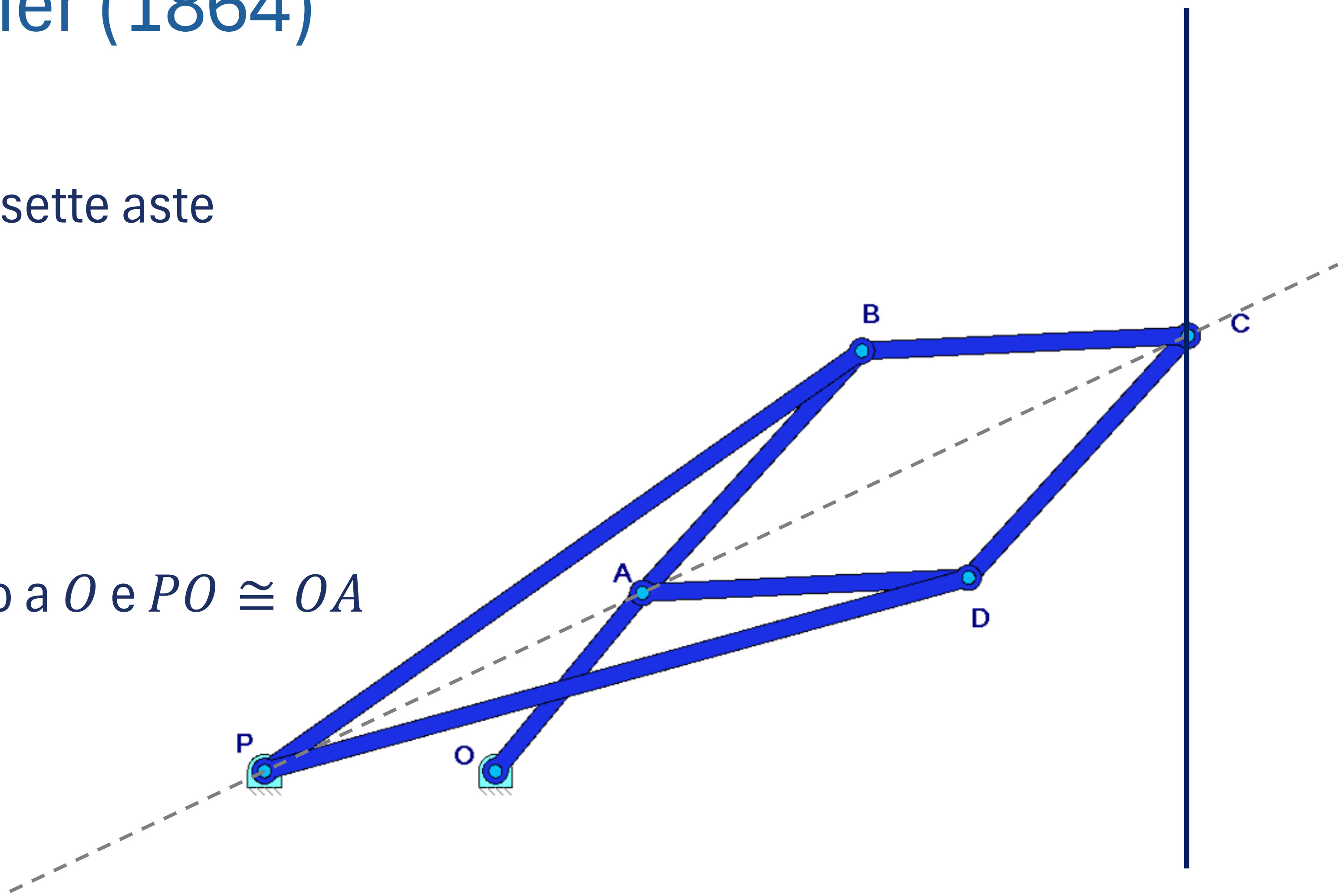
La guida di Peaucellier (1864)

Il meccanismo è costituito da sette aste incernierate

$AB \cong BC \cong CD \cong DA$

P e O sono fissi

A è vincolato a ruotare intorno a O e $PO \cong OA$



La guida di Peaucellier (1864)

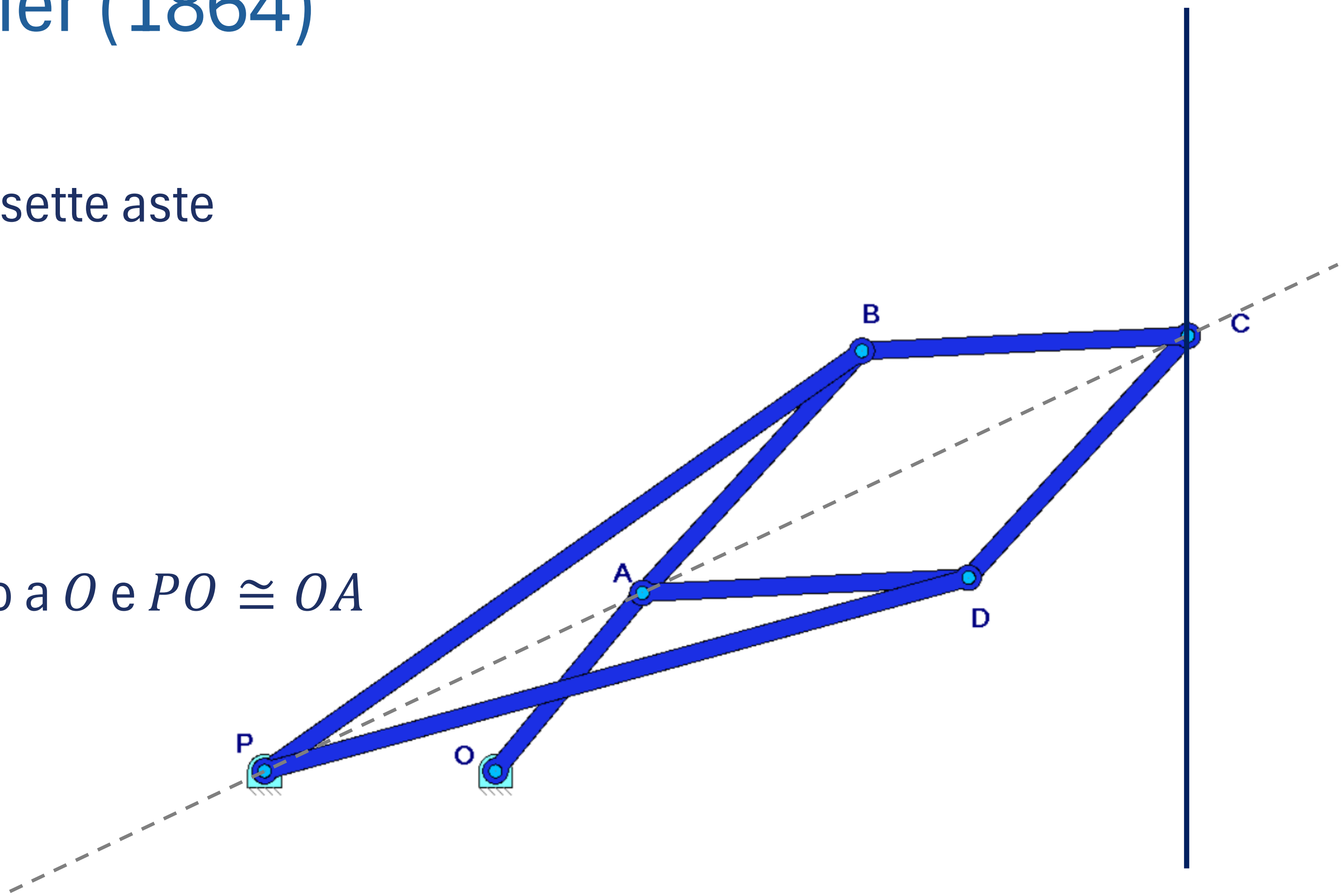
Il meccanismo è costituito da sette aste incernierate

$AB \cong BC \cong CD \cong DA$

P e O sono fissi

A è vincolato a ruotare intorno a O e $PO \cong OA$

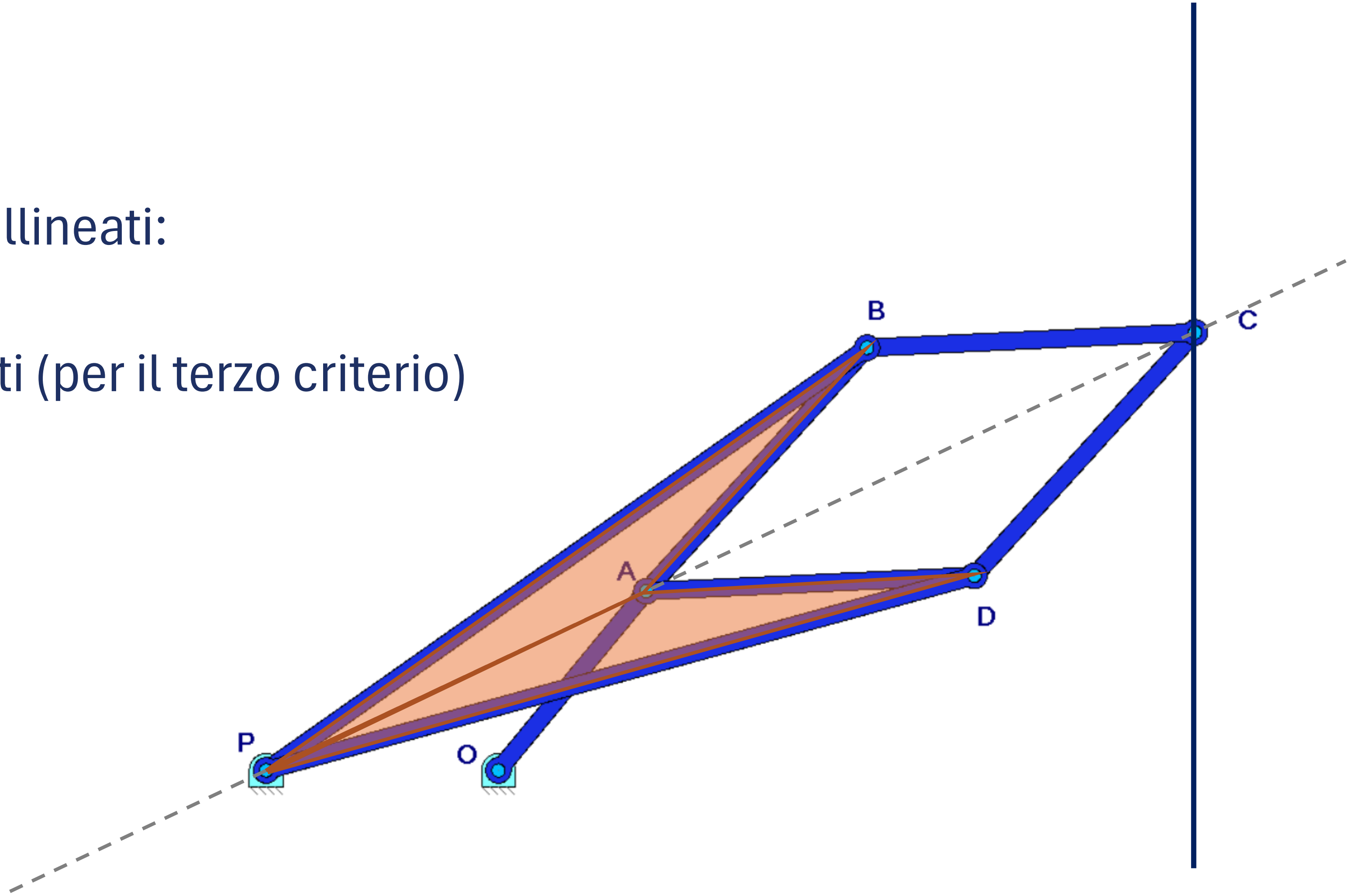
C descrive una retta



Considerazioni geometriche: congruenze tra triangoli

I punti P, A e C sono sempre allineati:

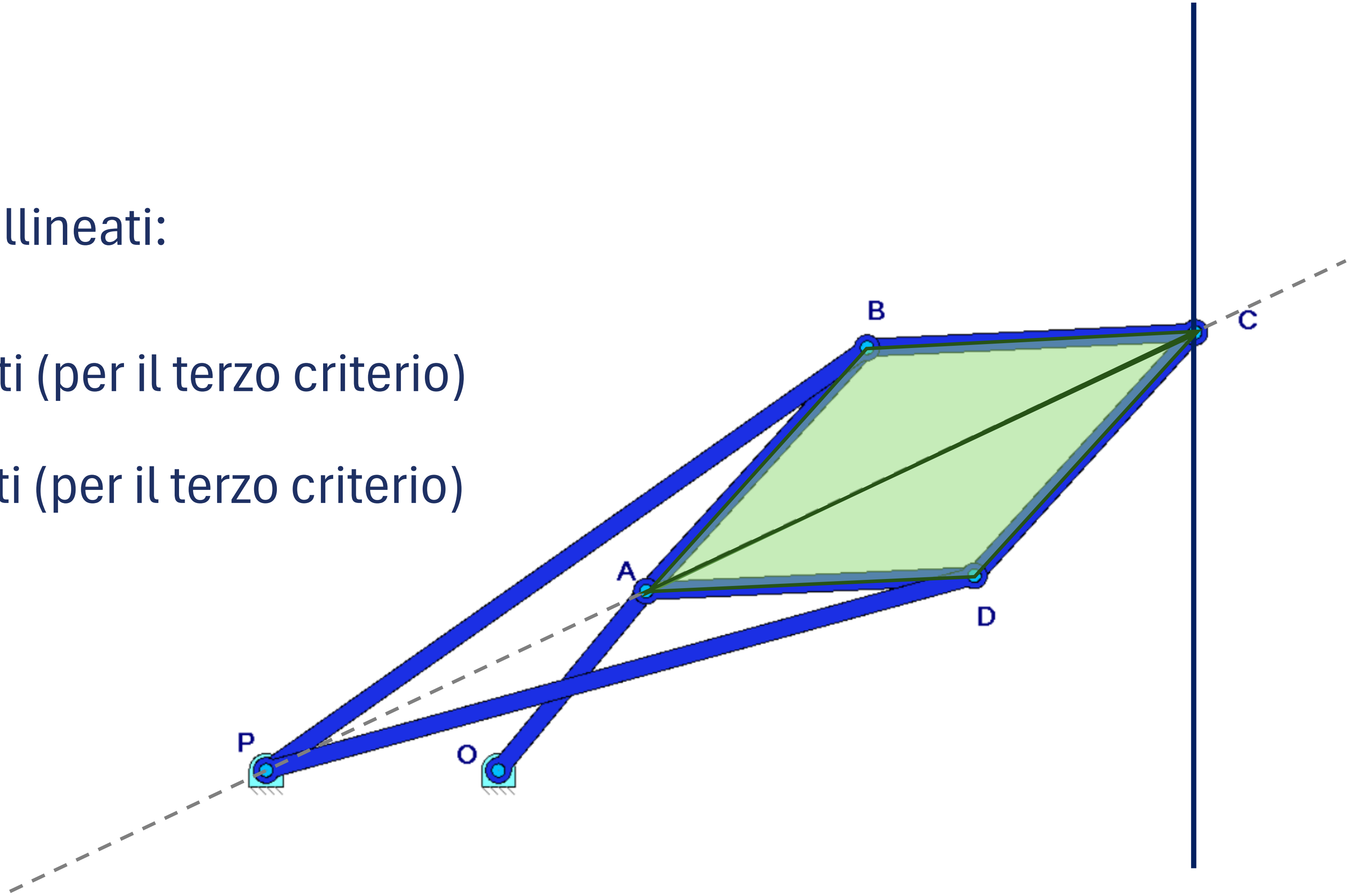
- PAB e PAD sono congruenti (per il terzo criterio)



Considerazioni geometriche: congruenze tra triangoli

I punti P, A e C sono sempre allineati:

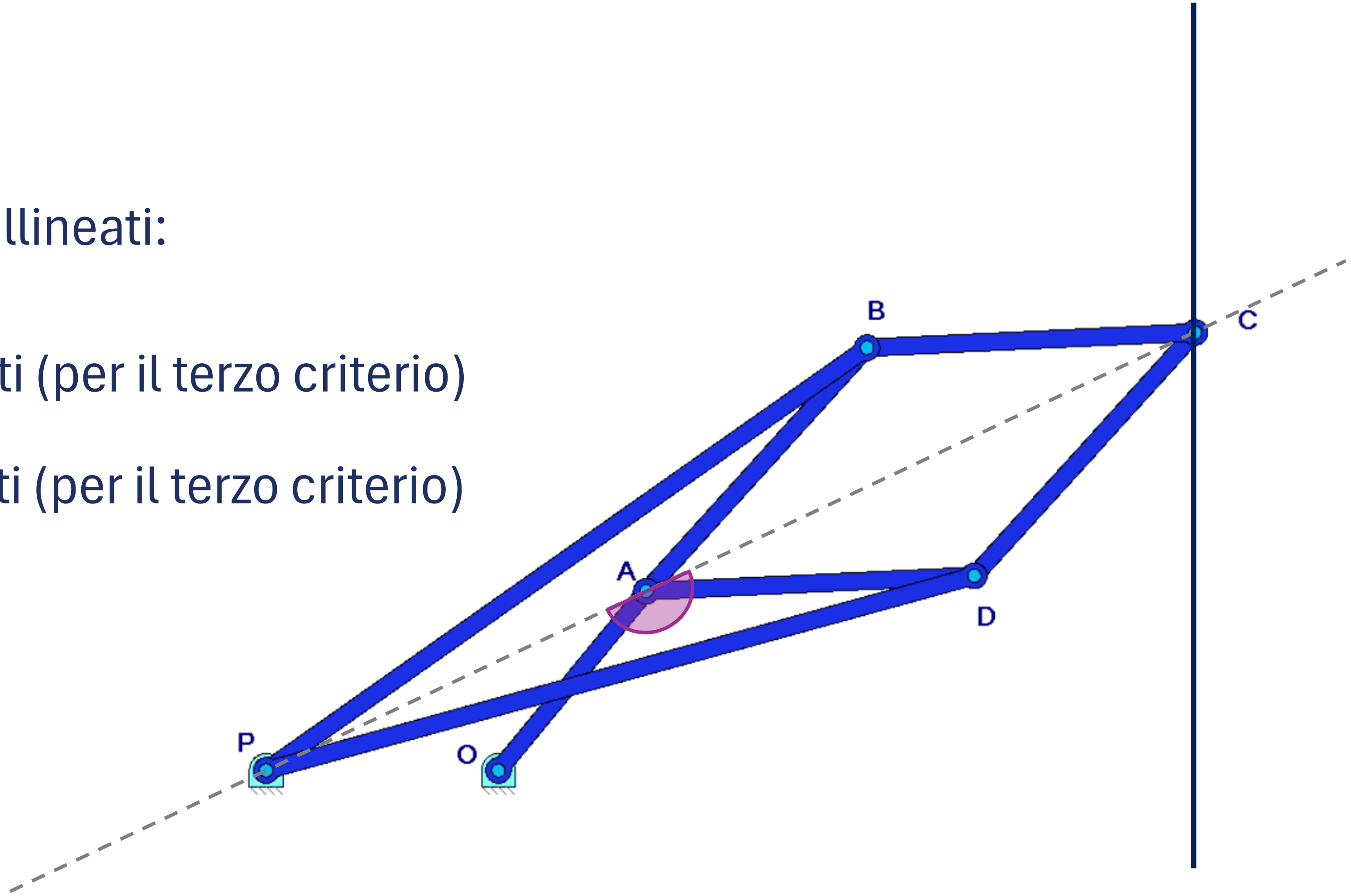
- PAB e PAD sono congruenti (per il terzo criterio)
- CAB e CAD sono congruenti (per il terzo criterio)



Considerazioni geometriche: congruenze tra triangoli

I punti P, A e C sono sempre allineati:

- PAB e PAD sono congruenti (per il terzo criterio)
- CAB e CAD sono congruenti (per il terzo criterio)
- L'angolo $\widehat{PAC}$ è piatto

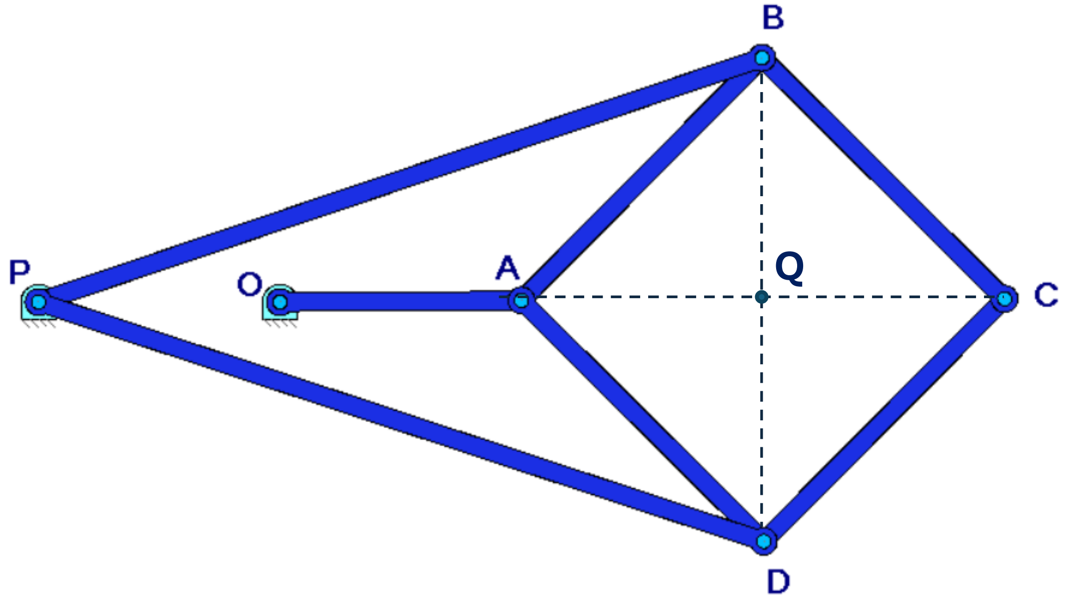


Considerazioni algebriche

Se Q è il punto in cui si incontrano le diagonali del rombo:

$$PA = PQ - AQ$$

$$PC = PQ + QC = PQ + AQ$$



Considerazioni algebriche

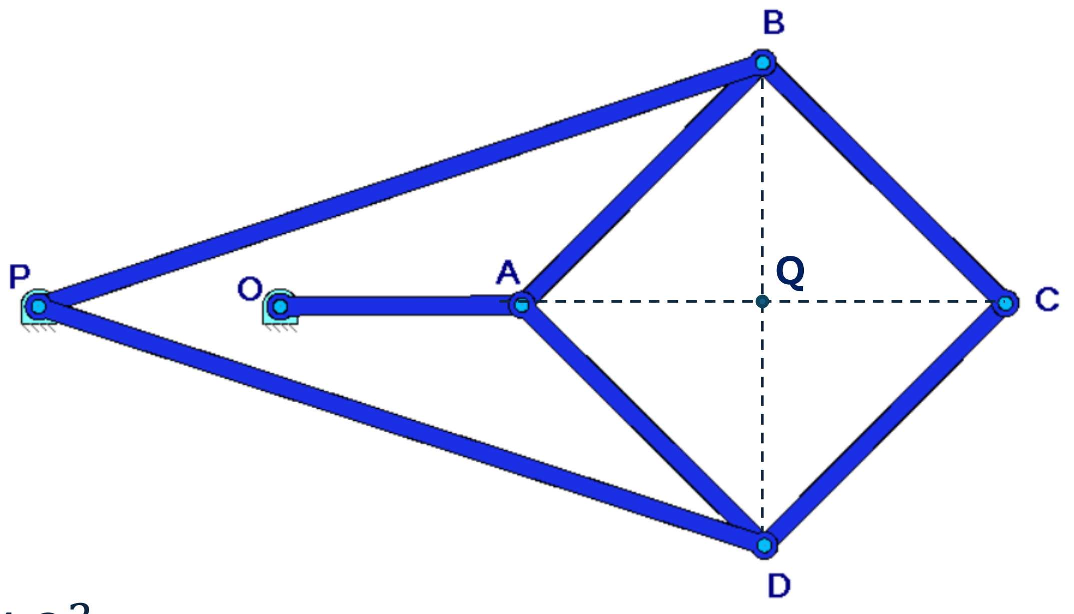
Se Q è il punto in cui si incontrano le diagonali del rombo:

$$PA = PQ - AQ$$

$$PC = PQ + QC = PQ + AQ$$

$$\Downarrow$$

$$PA \cdot PC = (PQ - AQ) \cdot (PQ + AQ) = PQ^2 - AQ^2$$



Considerazioni pratiche

Per il teorema di Pitagora

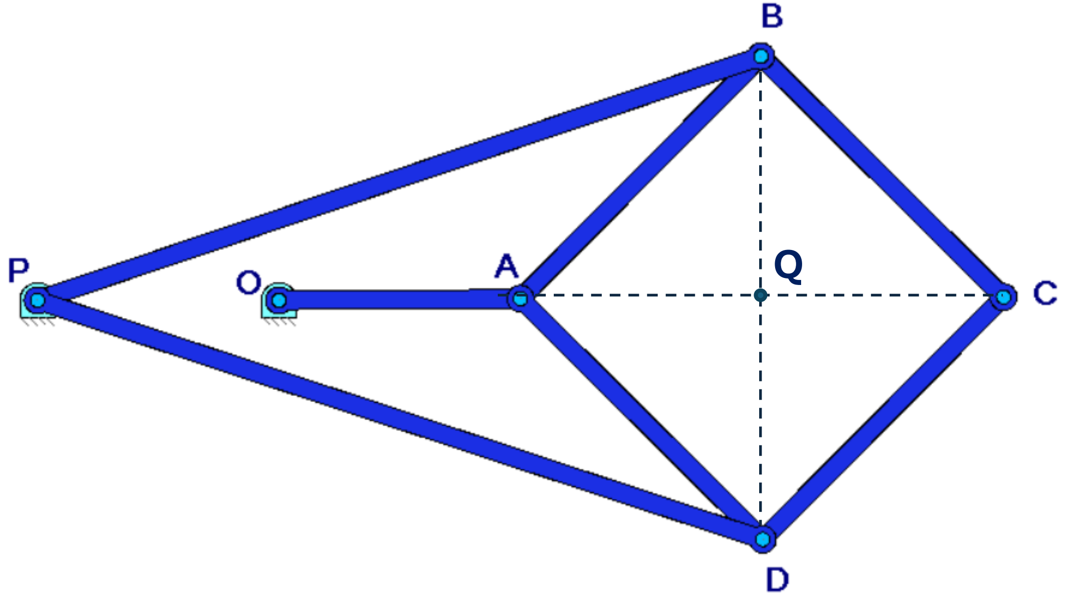
$PQ^2 = PD^2 - DQ^2$ e $AQ^2 = AD^2 - DQ^2$

Quindi

$$PA \cdot PC = PQ^2 - AQ^2 = PD^2 - AD^2$$

è costante:

dipende solo dalla lunghezza delle aste.

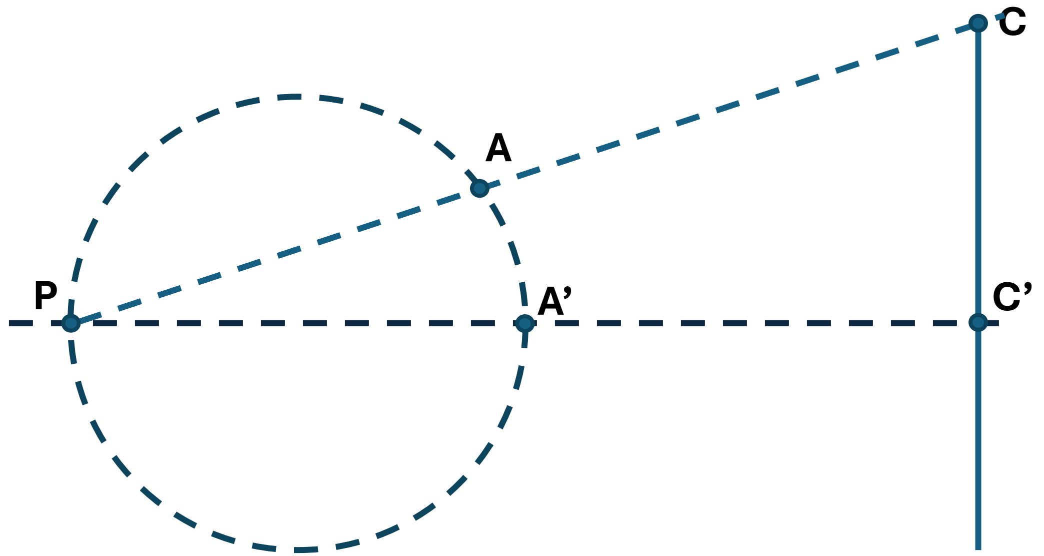


Considerazioni geometriche: similitudini

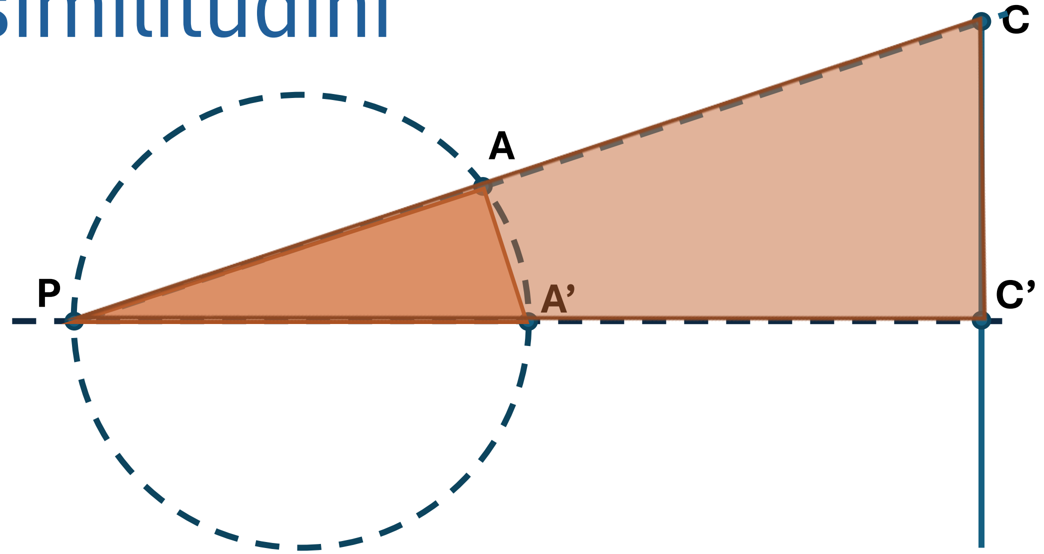
$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC$$

ovvero

$$PA : PC' = PA' : PC$$



Considerazioni geometriche: similitudini



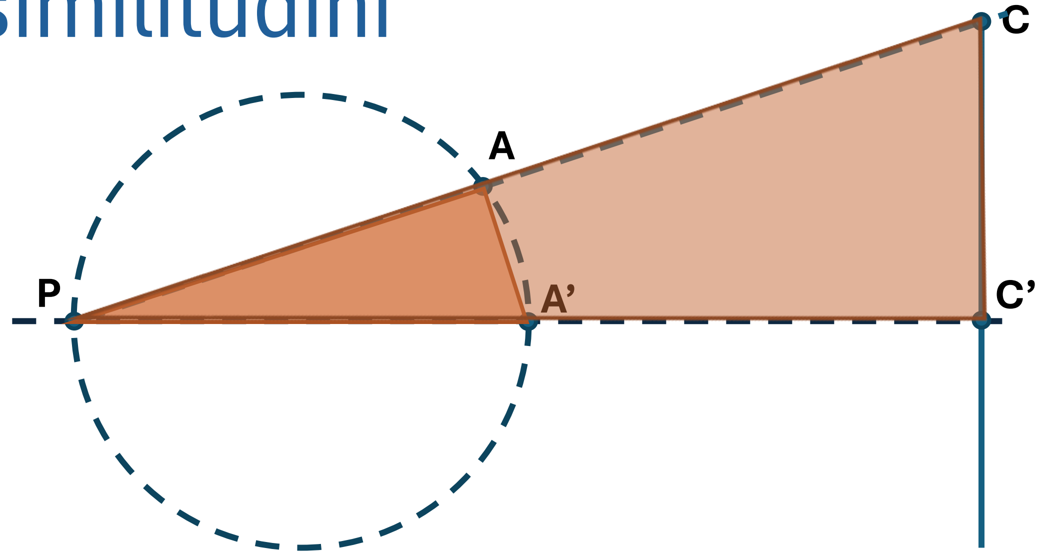
$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC$$

ovvero

$$PA : PC' = PA' : PC$$

Avendo l'angolo in P in comune, PAA' e $PC'C$ sono triangoli simili

Considerazioni geometriche: similitudini

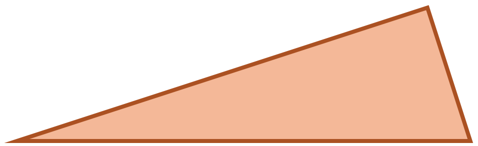


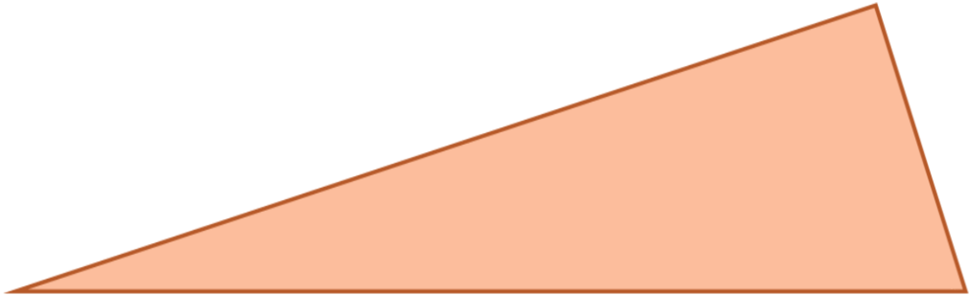
$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC$$

ovvero

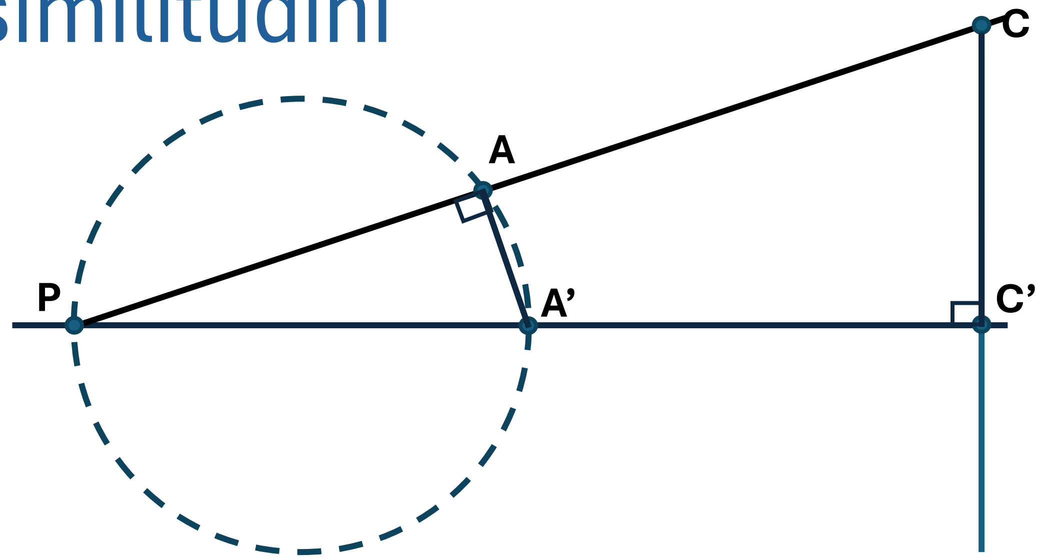
$$PA : PC' = PA' : PC$$

Avendo l'angolo in P in comune, PAA' e $PC'C$ sono triangoli simili





Considerazioni geometriche: similitudini



$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC$$

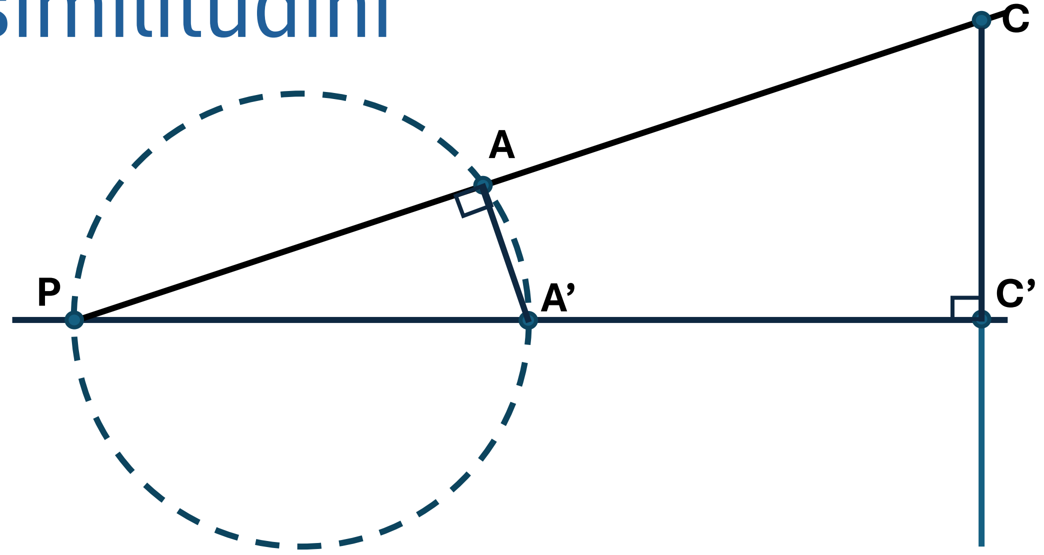
ovvero

$$PA : PC' = PA' : PC$$

Avendo l'angolo in P in comune, PAA' e $PC'C$ sono triangoli simili

Essendo $\widehat{PAA'}$ un angolo retto, lo è anche $\widehat{PC'C}$

Considerazioni geometriche: similitudini

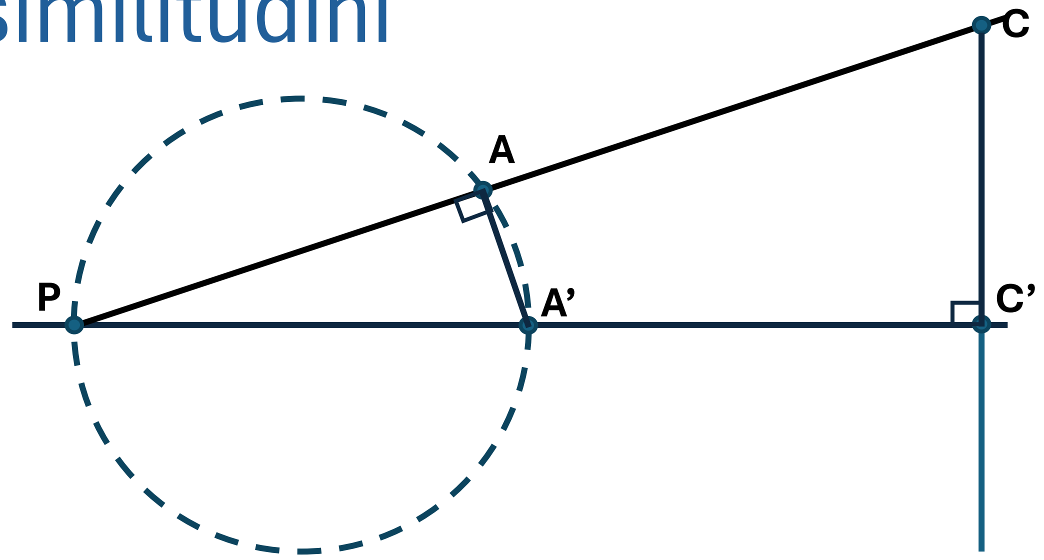


$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC$$

quindi PAA' e $PC'C$ sono triangoli simili

Essendo $P\hat{A}A'$ un angolo retto, lo è anche $P\widehat{C'}C$

Considerazioni geometriche: similitudini



$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC$$

quindi PAA' e $PC'C$ sono triangoli simili

Essendo $P\hat{A}A'$ un angolo retto, lo è anche $P\widehat{C'}C$

Questo vale per ogni posizione di A sulla circonferenza, quindi C si muove su una retta

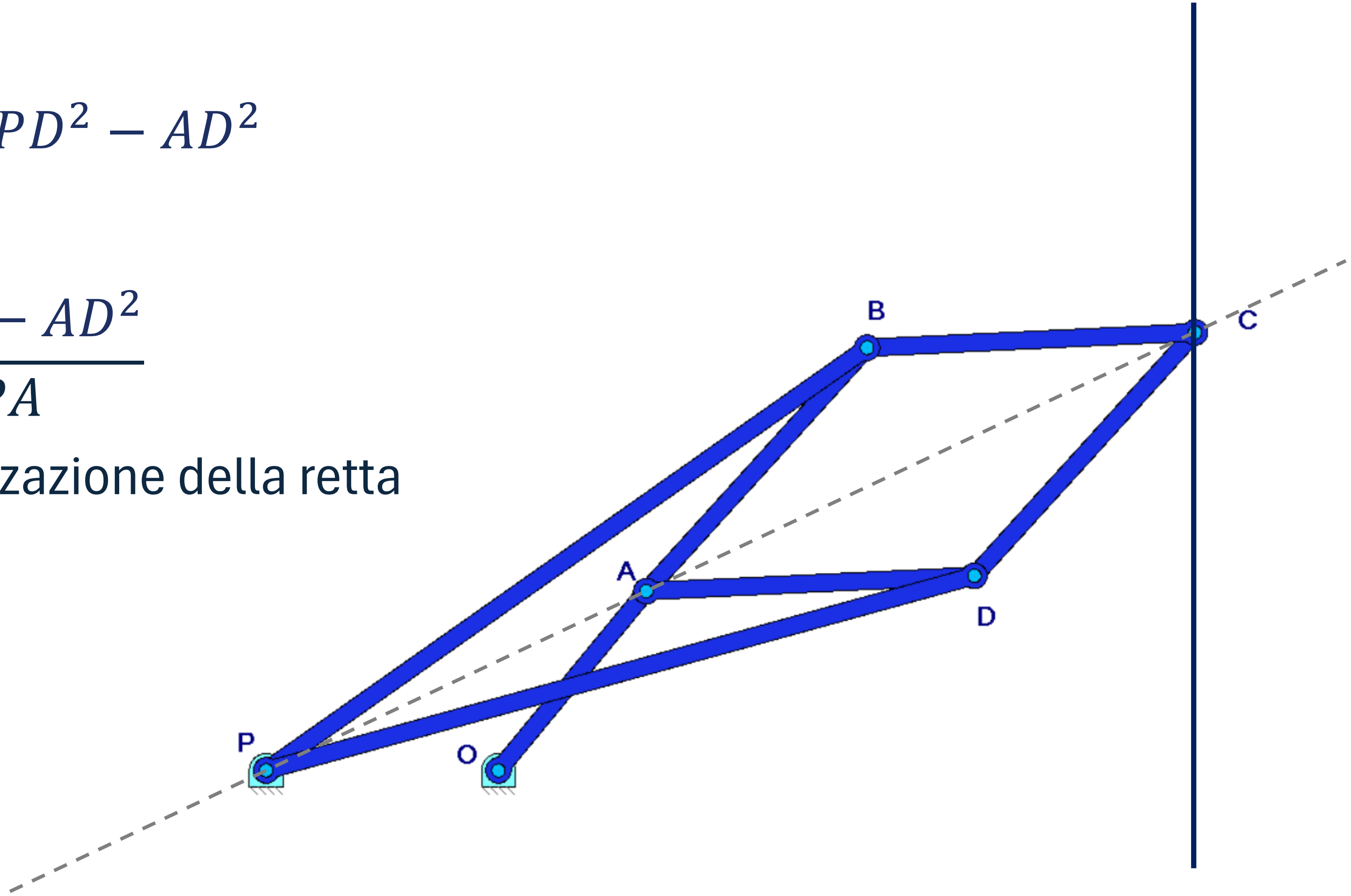
Considerazioni geometriche: trigonometria

$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC = PD^2 - AD^2$$

Essendo

$$PC = \frac{PD^2 - AD^2}{PA}$$

si può scrivere una parametrizzazione della retta descritta da C

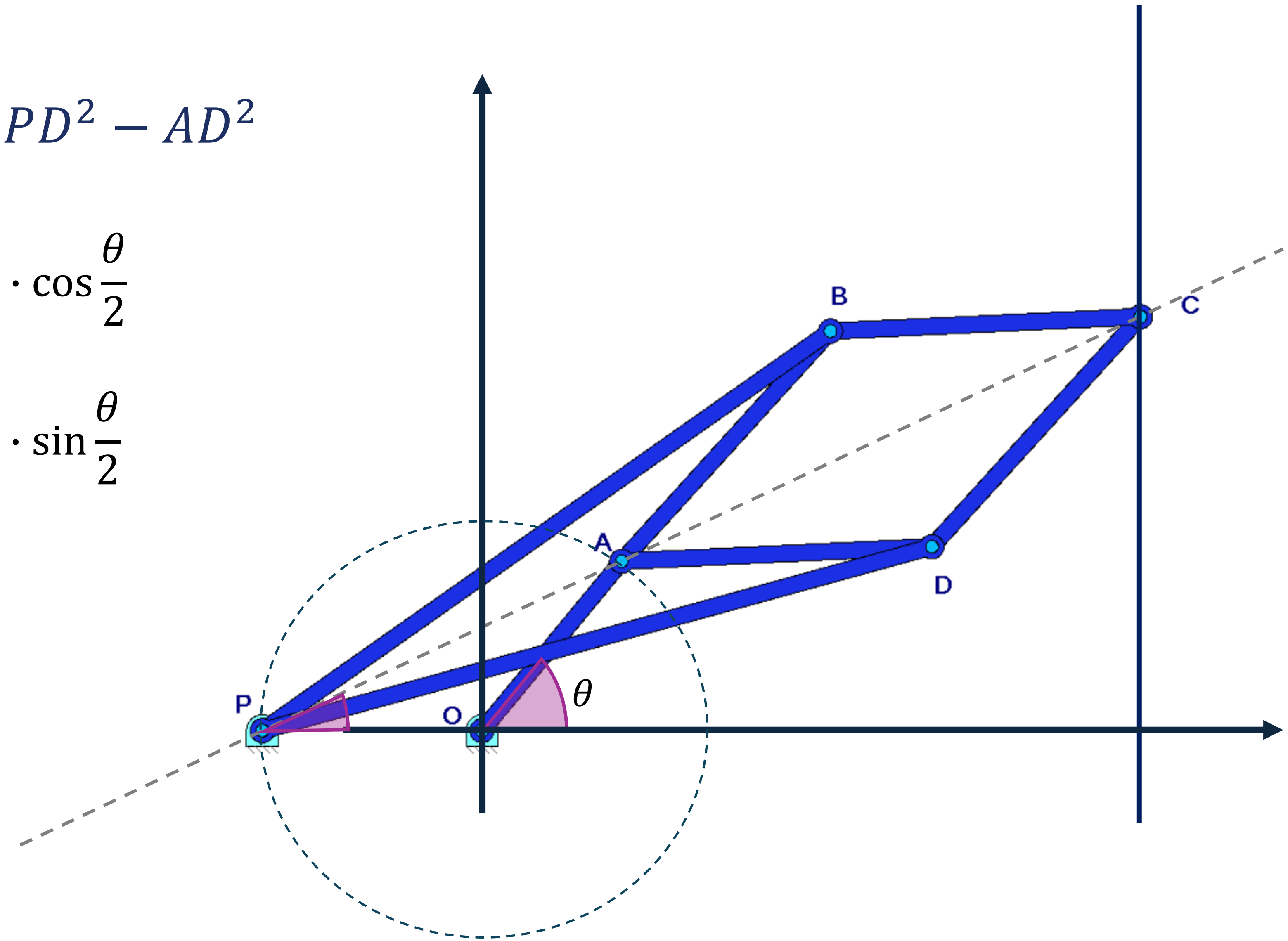


Considerazioni geometriche: trigonometria

$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC = PD^2 - AD^2$$

$$x_C = PC \cdot \cos\frac{\theta}{2} = \frac{PD^2 - AD^2}{PA} \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

$$y_C = PC \cdot \sin\frac{\theta}{2} = \frac{PD^2 - AD^2}{PA} \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$



Considerazioni geometriche: trigonometria

Poiché POA è isoscele, per il teorema di Carnot

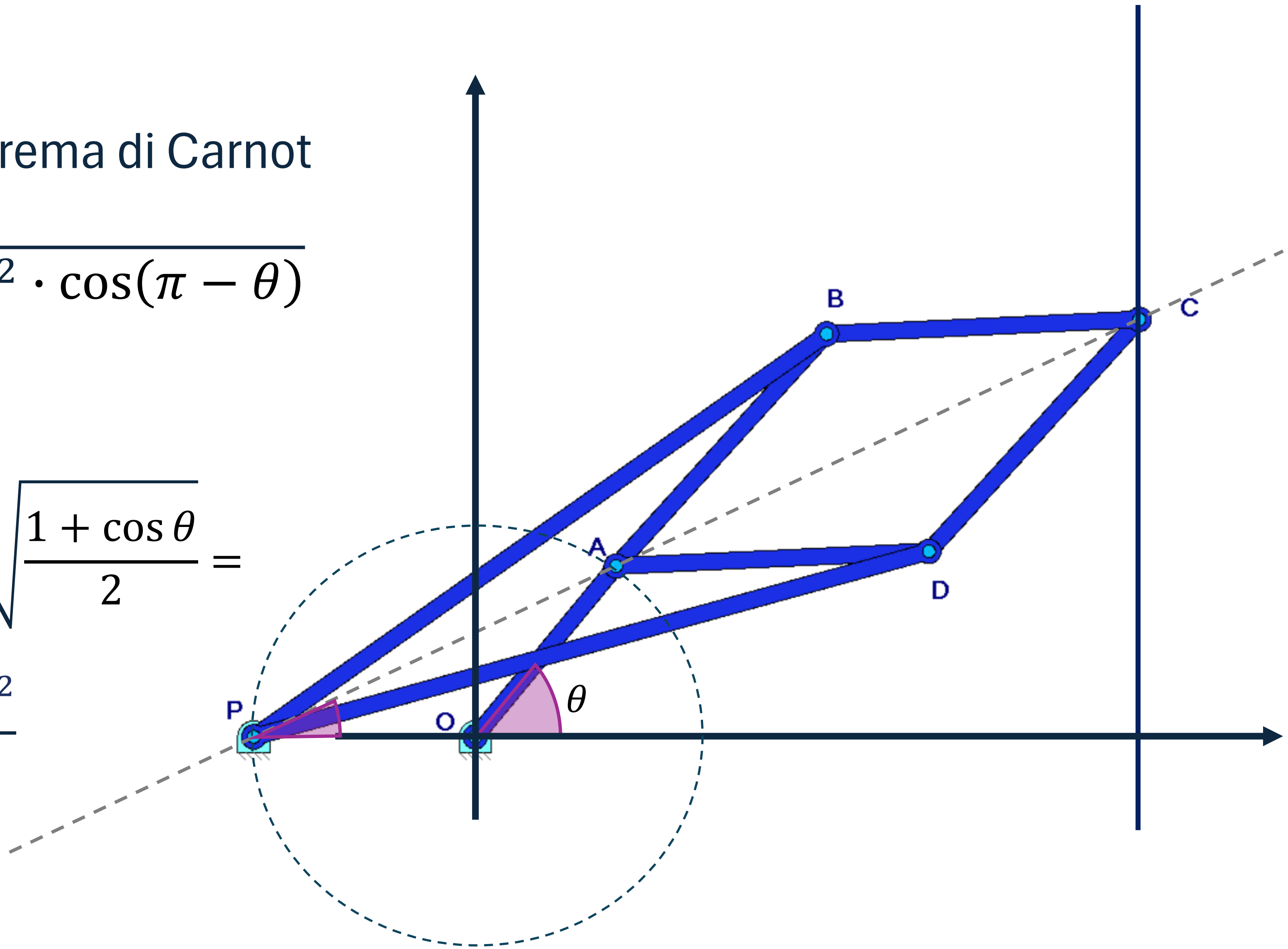
$$PA = \sqrt{2(OA)^2 - 2(OA)^2 \cdot \cos(\pi - \theta)}$$
$$= OA\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$$

e

$$x_C = \frac{PD^2 - AD^2}{OA\sqrt{2(1+\cos\theta)}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} =$$

$$= \frac{PD^2 - AD^2}{2OA}$$

Costante perché dipende solo dalla lunghezza delle aste



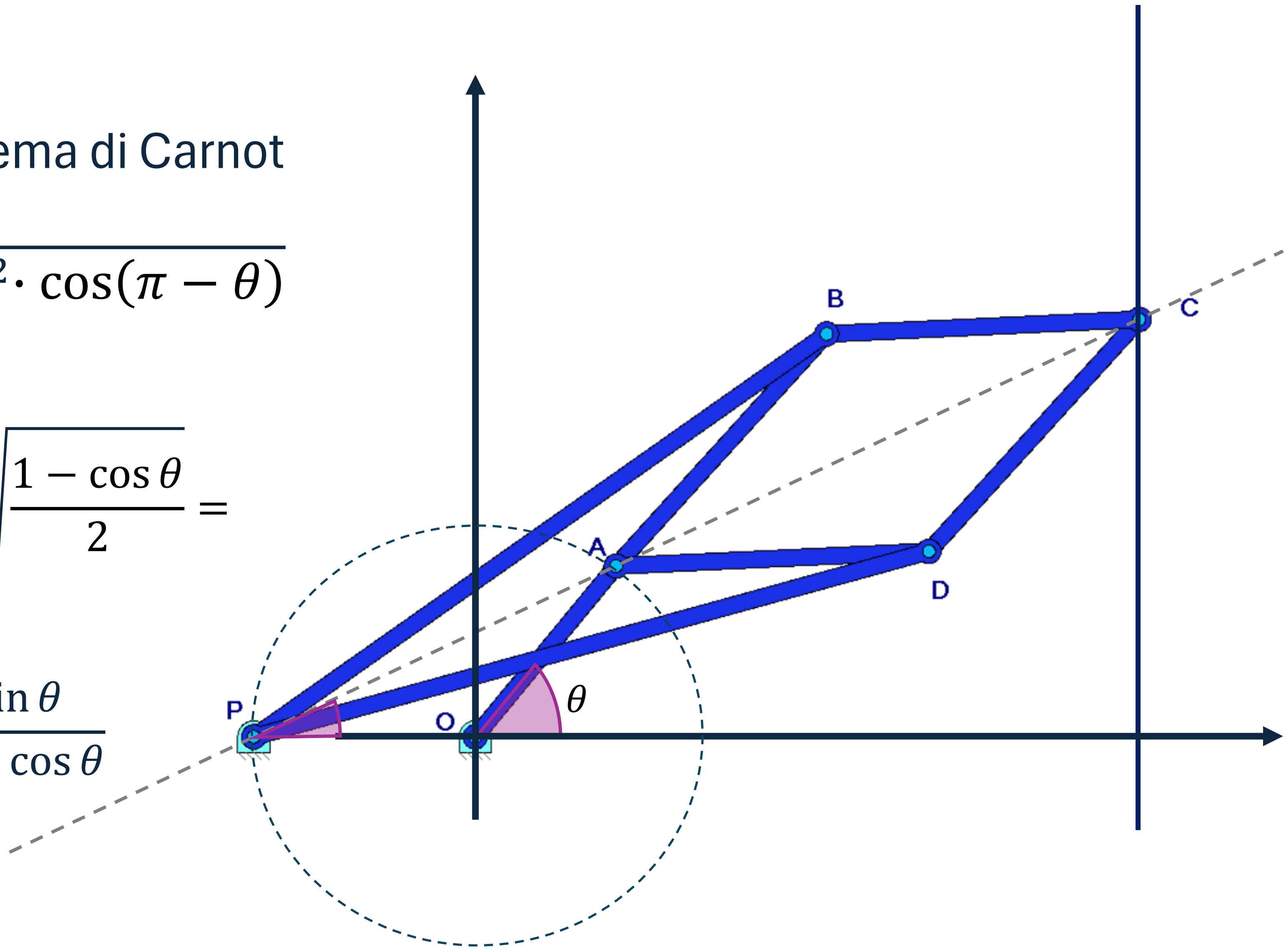
Considerazioni geometriche: trigonometria

Poiché POA è isoscele, per il teorema di Carnot

$$PA = \sqrt{2(OA)^2 - 2(OA)^2 \cdot \cos(\pi - \theta)}$$
$$= OA\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$y_C = \frac{PD^2 - AD^2}{OA\sqrt{2(1+\cos\theta)}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} =$$

$$= \frac{PD^2 - AD^2}{2OA} \cdot \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$



Considerazioni geometriche: trigonometria

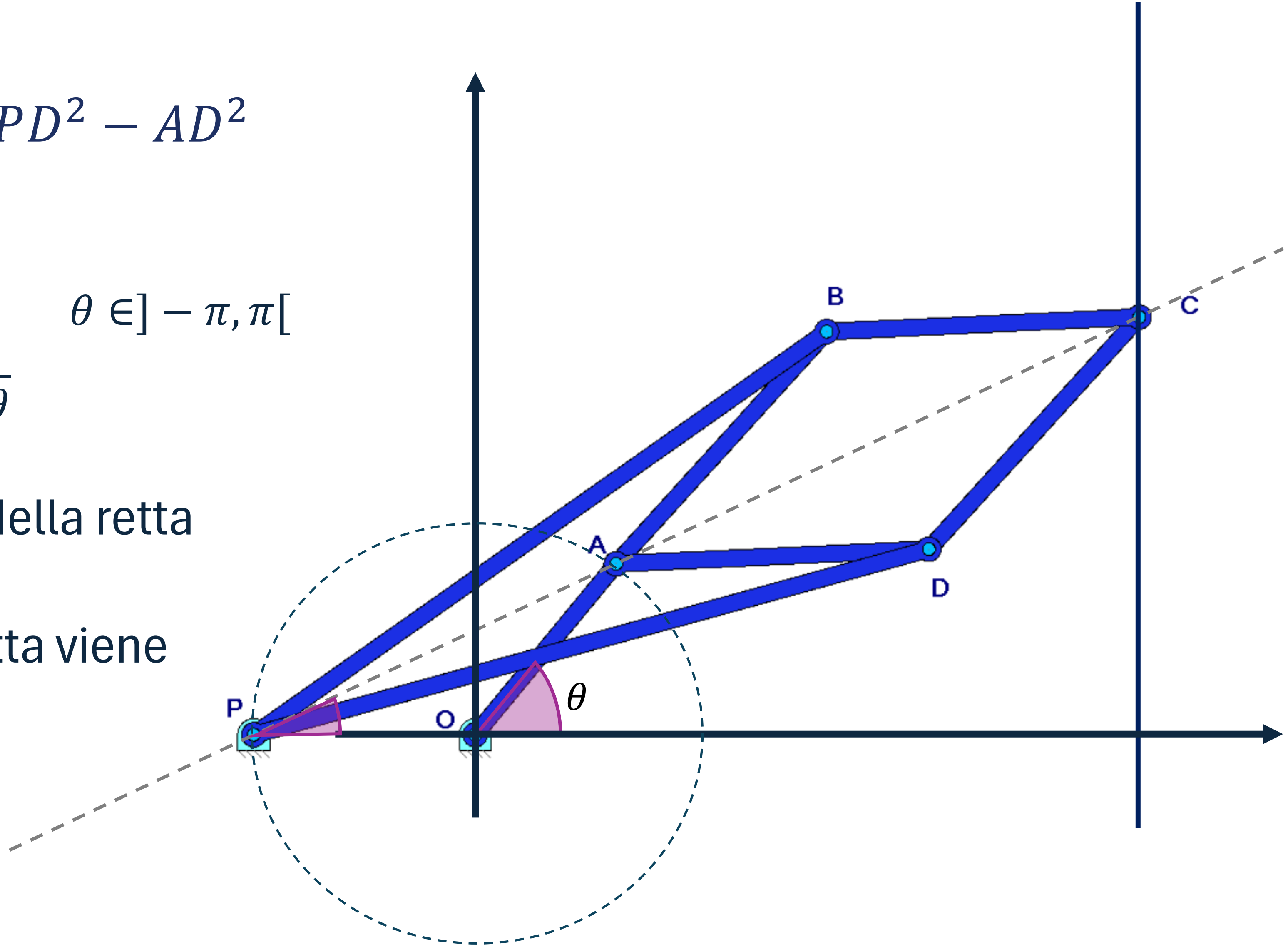
$$PA' \cdot PC' = PA \cdot PC = PD^2 - AD^2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{PD^2 - AD^2}{2OA} \\ y = \dfrac{PD^2 - AD^2}{2OA} \cdot \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \end{cases} \qquad \theta \in]-\pi, \pi[$$

da cui si ottiene l'equazione della retta

ma anche il **modo** in cui la retta viene percorsa

GeoGebra



GeoGebra

Il software di geometria dinamica permette di:

- Visualizzare il movimento della macchina in tempo reale
- Verificare numericamente le relazioni tra le lunghezze
- Tracciare il luogo geometrico descritto dai punti
- Modificare i parametri e osservare le variazioni

Alternare costruzione fisica e simulazione digitale permette di cogliere aspetti complementari: la manualità e la precisione matematica.

L'animazione GeoGebra integra l'esperienza concreta e facilita la comprensione del funzionamento del meccanismo.

Collocazione nel curricolo: scuola secondaria di primo grado

1

Classe seconda

- Similitudine e proporzioni tra segmenti
- Proprietà fondamentali della circonferenza
- Approccio laboratoriale con materiali concreti

2

Competenze sviluppate

- Costruire e utilizzare modelli fisici
- Collegare matematica e tecnologia
- Osservare, formulare ipotesi, verificare
- Lavorare in gruppo su progetti pratici

Indicazioni nazionali – Geometria

Riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata

Collocazione nel curricolo: scuola secondaria di secondo grado

1

Classe Seconda - Geometria sintetica

Dimostrazione del funzionamento attraverso congruenze, similitudini, proprietà delle circonferenze

2

Approfondimenti Successivi

Con conoscenze di trigonometria: parametrizzazione del segmento tracciato e analisi formale del movimento

Indicazioni nazionali

Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni... risolvere problemi di natura geometrica e applicativi

Attività laboratoriale: fasi operative

Fase 1. Esplorazione

Presentazione del problema: perché è difficile tracciare una retta con un meccanismo?
Discussione in classe e raccolta delle idee iniziali degli studenti.

Fase 2. Costruzione

Realizzazione fisica del modello con materiali semplici (cartoncino, fermacampioni) seguendo lo schema della macchina di Peaucellier.

Fase 3. Sperimentazione

Manipolazione del modello, osservazione della traiettoria, misurazione delle lunghezze e verifica delle proporzioni tra le aste.

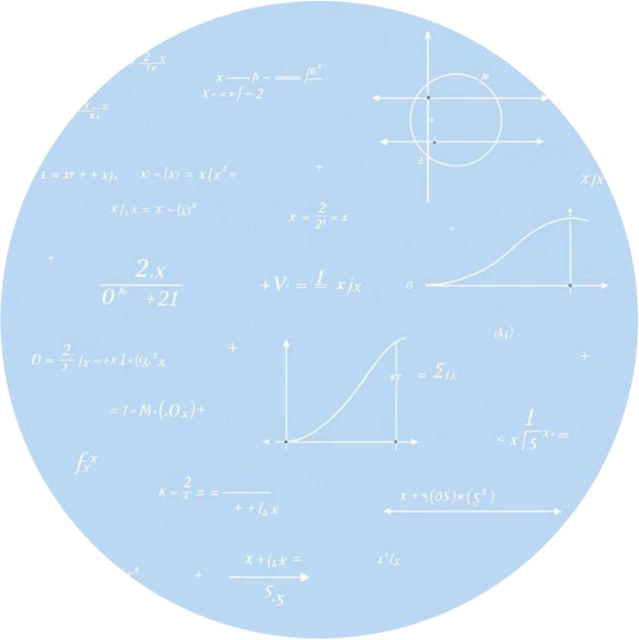
Fase 4. Formalizzazione

Analisi matematica: dimostrazione delle proprietà geometriche di triangoli e circonferenze.

Fase 5. Discussione e rielaborazione

Riflessione comune sulle fasi del percorso.

Approfondimenti e sviluppi



Parametrizzazione

Per studenti con conoscenze di trigonometria: determinare le equazioni parametriche del segmento tracciato dal meccanismo.

Storia della matematica

Contestualizzare l'invenzione nella rivoluzione industriale e il ruolo della geometria nelle applicazioni.

Interdisciplinarità

Collegare con fisica (cinematica), tecnologia (meccanismi) e storia (sviluppo delle macchine nel XIX secolo).

Perché proporre questa attività?

✓ Curricolarmente coerente

Si inserisce naturalmente nel curricolo della scuola secondaria di primo e secondo grado

✓ Riproducibile

Materiali semplici, tempi gestibili (3-4 ore), adattabile a diversi livelli di approfondimento e contesti scolastici.

✓ Laboratoriale e coinvolgente

Unisce teoria e pratica, stimolando curiosità attraverso la manipolazione di oggetti concreti e software.

✓ Matematicamente ricca

Dalla similitudine all'inversione circolare, fino alla parametrizzazione: molteplici livelli di lettura matematica.

Attuale

2025 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems

International Journal of Advanced Robotic Systems January-February 2018

La matematica si scopre facendo: la macchina di Peaucellier trasforma un problema meccanico in un'avventura geometrica

Grazie per l’attenzione!

Bibliografia - sitografia

Bartolini Bussi, Maria G, Daina Taimina, and Masami Isoda. “Concrete Models and Dynamic Instruments as Early Technology Tools in Classrooms at the Dawn of ICMI: From Felix Klein to Present Applications in Mathematics Classrooms in Different Parts of the World.” *ZDM* 42.1 (2010): 19–31.

Chi, Michelene T. H. “Active-Constructive-Interactive: A Conceptual Framework for Differentiating Learning Activities.” *Topics in cognitive science* 1.1 (2009): 73–105. Web.

Ding, Haokai, and Wenzeng Zhang. “A Novel Gripper with Semi-Peaucellier Linkage and Idle-Stroke Mechanism for Linear Pinching and Self-Adaptive Grasping.” *Proceedings of the ... IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2025. 2851–2856.

Godoy, Jorge Curiel et al. “Nonanthropomorphic Exoskeleton with Legs Based on Eight-Bar Linkages.” *International journal of advanced robotic systems* 15.1 (2018)

https://www.macchinematematiche.org/mm/curve-piane/guide-rettilinee/guida-rettilinea-di-watt.html

https://collezionistoriche.polito.it/it/oggetti/13801-cinematismi

https://digital.library.cornell.edu/catalog/ss:372718

GIM – software per costruire meccanismi virtuali https://www.ehu.eus/compmech/software/

Il Problema del Movimento Rettilineo

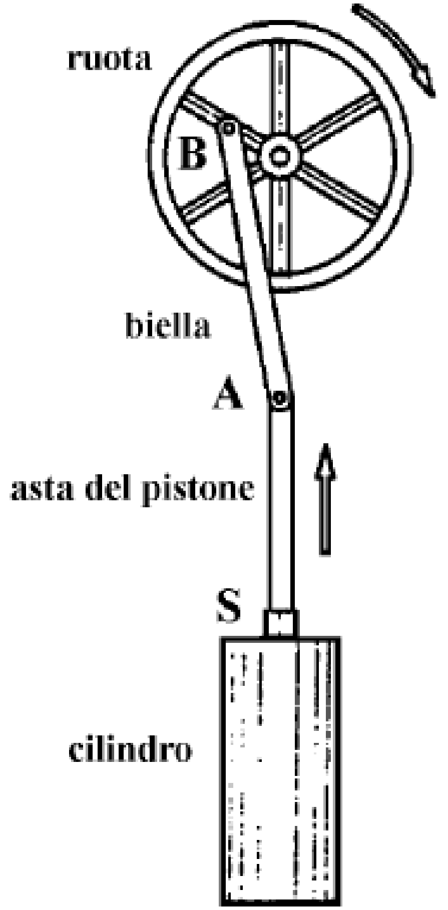
Il problema meccanico

Dal punto di vista ingegneristico, realizzare una rotazione è semplice: basta un perno fisso. Ma come tracciare un segmento perfettamente rettilineo con un meccanismo?

Per secoli, questo problema ha affascinato matematici e ingegneri, portando alla ricerca di soluzioni eleganti che trasformassero il moto circolare in moto rettilineo e viceversa.

Macchine per tracciare segmenti RIVEDERE

Uno dei problemi che ha impegnato gli ingegneri tra il ‘700 e l’800 è stato quello di trovare un sistema per guidare l’asta del pistone di una macchina a vapore in un moto rettilineo alternato.



Si tratta di trasmettere un moto di **traslazione** in un moto di **rotazione**

E viceversa?