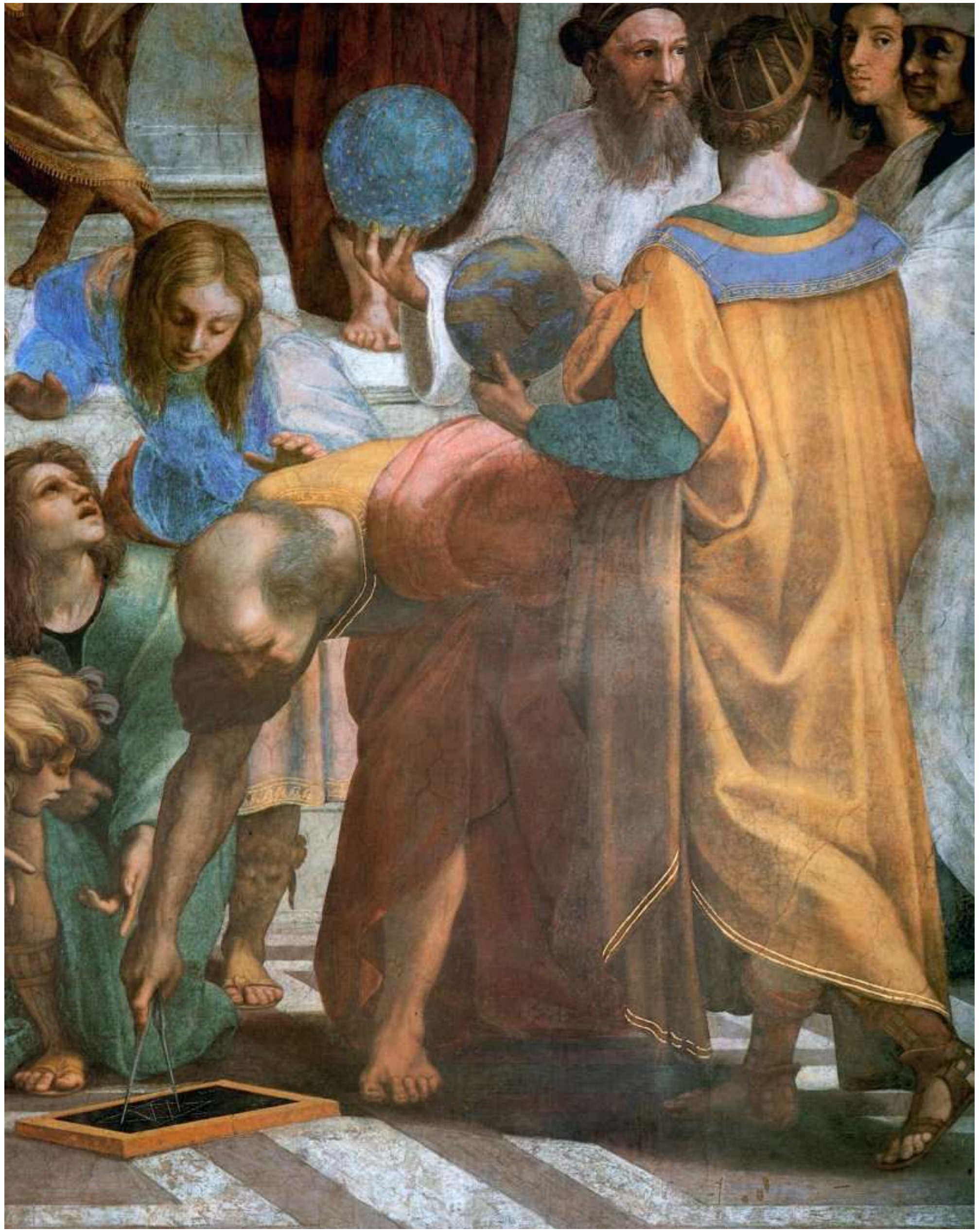
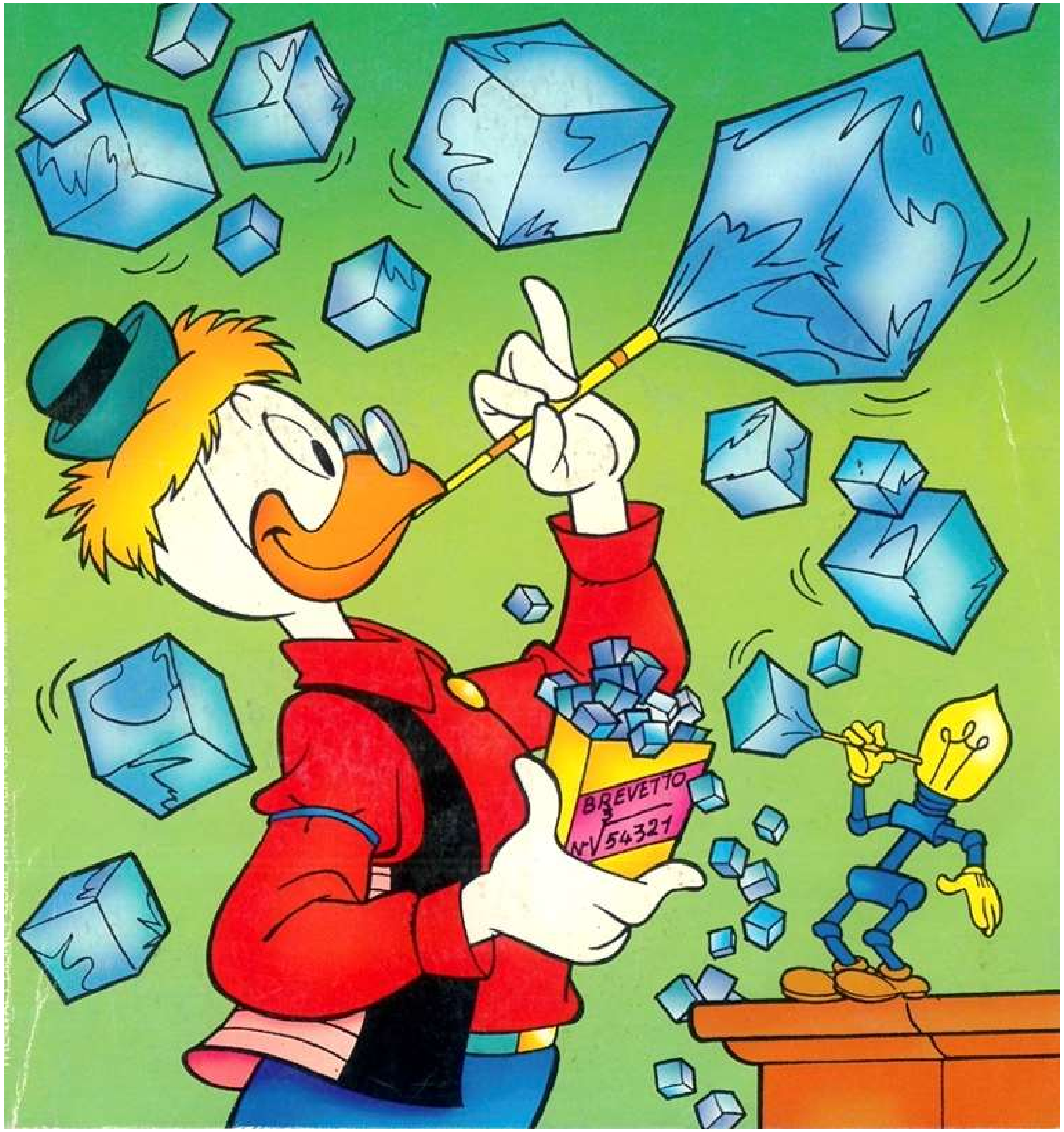

Andreatta
Archimede, l'arte della misura
Marco Andreatta
$A_{sfera} = 4\pi r^2$
Archimede, l'arte della misura
il Mulino




BREVETTO
N° $\sqrt[3]{54321}$

Elevarsi
al di sopra di se stessi
e conquistare
il mondo

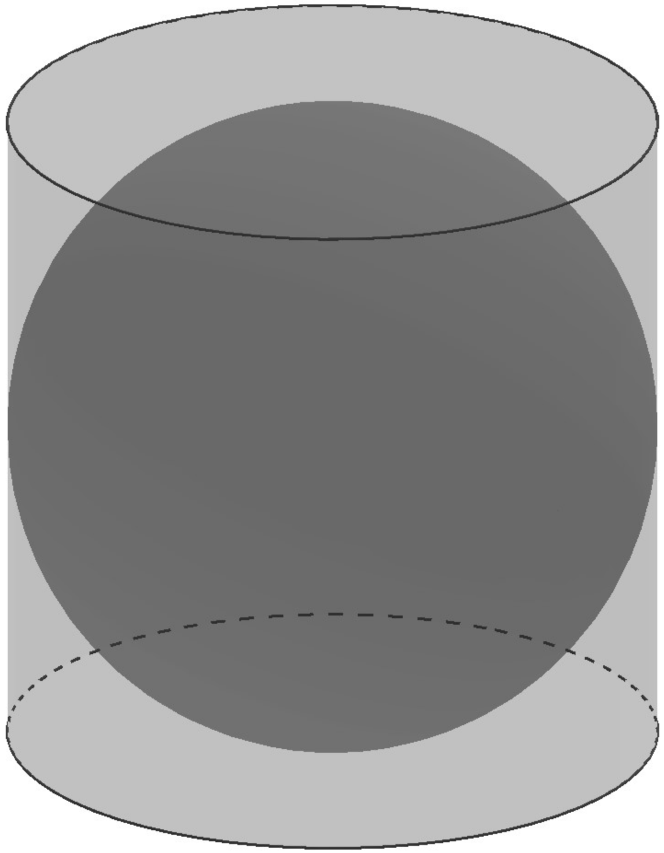

IL QUARTO EPISODIO

Sulla Sfera e sul Cilindro

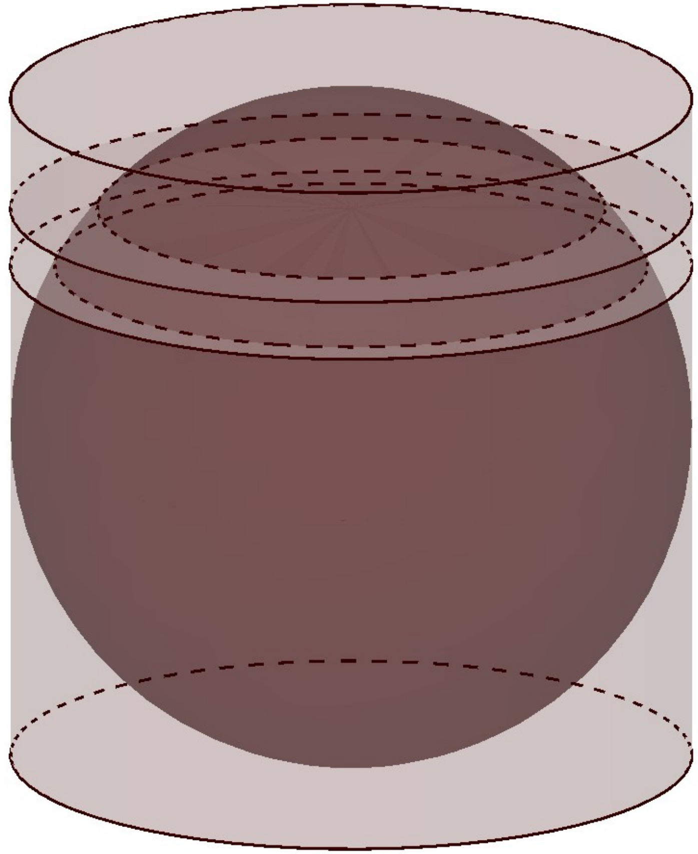
In seguito, essendomi imbattuto in teoremi degni di considerazione, composi la loro dimostrazione.

*… **che ogni cilindro con base uguale al cerchio massimo di una sfera e altezza uguale al diametro è una volta e mezzo la sfera e la sua superficie totale è anch'essa una volta e mezzo la superfice della sfera….***

*Queste proprietà sono da sempre inerenti alla natura delle figure menzionate, ma sono rimaste ignote a coloro che prima di noi si occuparono di geometria, dal momento che nessuno di essi comprese che esiste **commensurabilità tra queste figure**.*

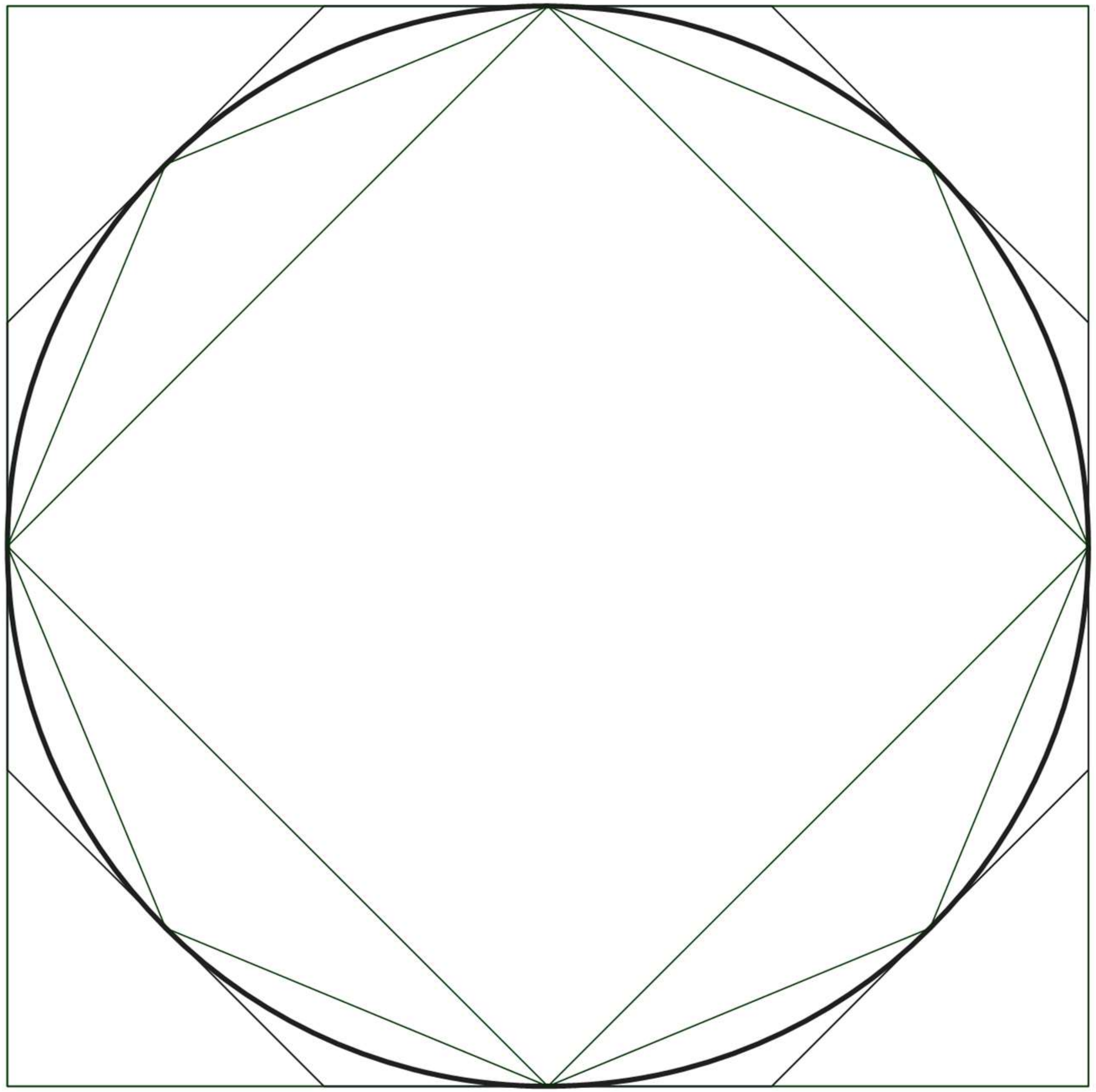


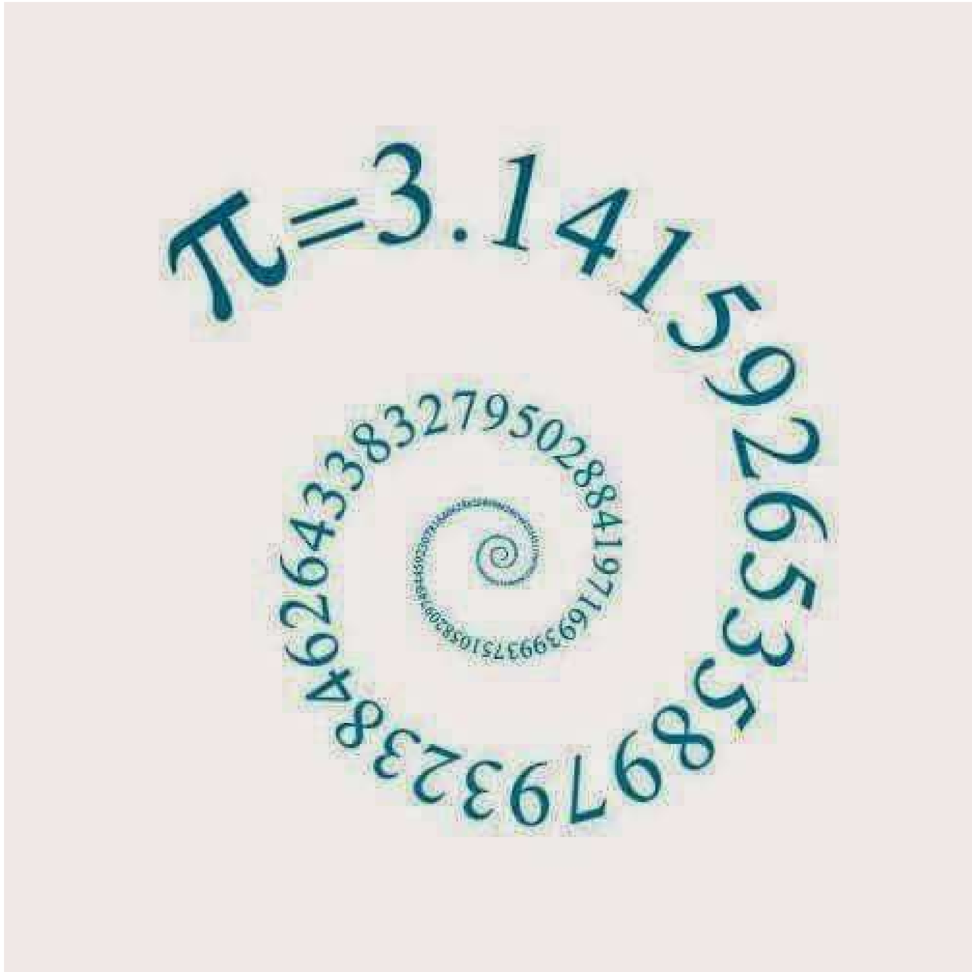
$$A_{sfera} = 4\,\pi\, r^2$$



Eduard J. Dijksterhuis, matematico, storico ed esegeta:

Archimede esprime qui la propria meraviglia per il fatto che alle figure geometriche possano inerire notevoli proprietà che, per non essere esplicitate dalla definizione, rimangono a lungo ignote, nonostante la loro semplicità. Si tratta, insomma, del tipico stupore del matematico nei confronti della ***ricchezza intrinseca e insospettata delle proprie definizioni***.



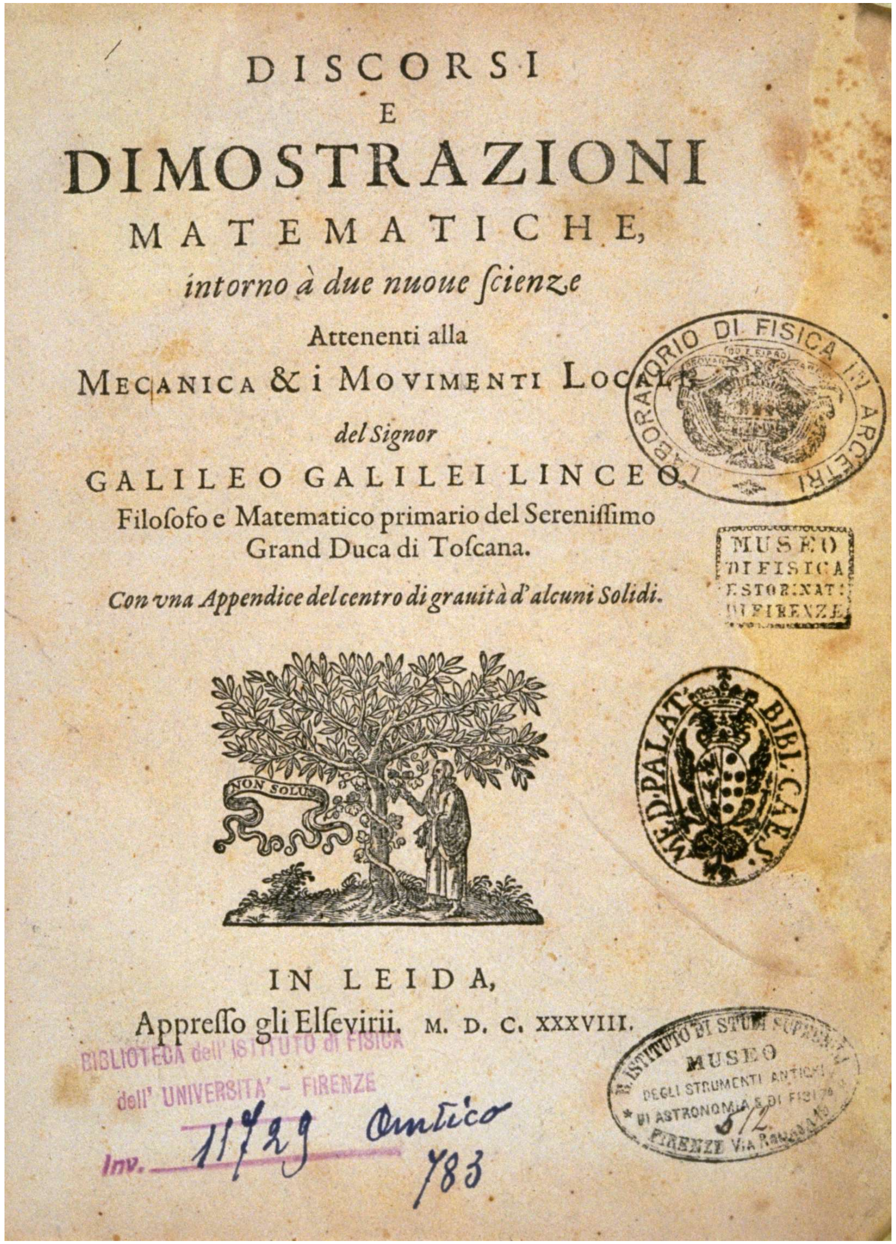

π=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097

Lambanomena, un gruppo di postulati o assiomi, ovvero di proposizioni fondamentali non dimostrate che riguardano figure e proprietà note.

Quinto lambanomena: *Che inoltre tra linee diseguali, superfici diseguali e solidi diseguali il maggiore superi il minore di una quantità tale che, se addizionata a sé stessa, possa superare ogni assegnata grandezza del tipo di quelle confrontate tra loro.*

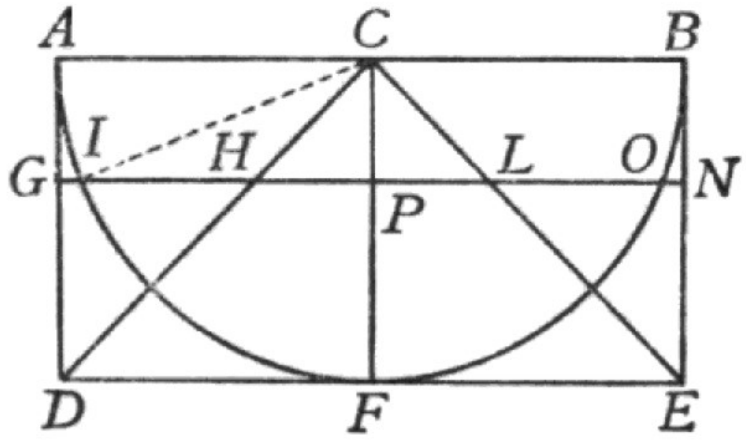
E’ bene osservare che ancora oggi è in atto tra i linguisti un dibattito su come tradurre la seconda parte del postulato, con posizioni le più disparate.

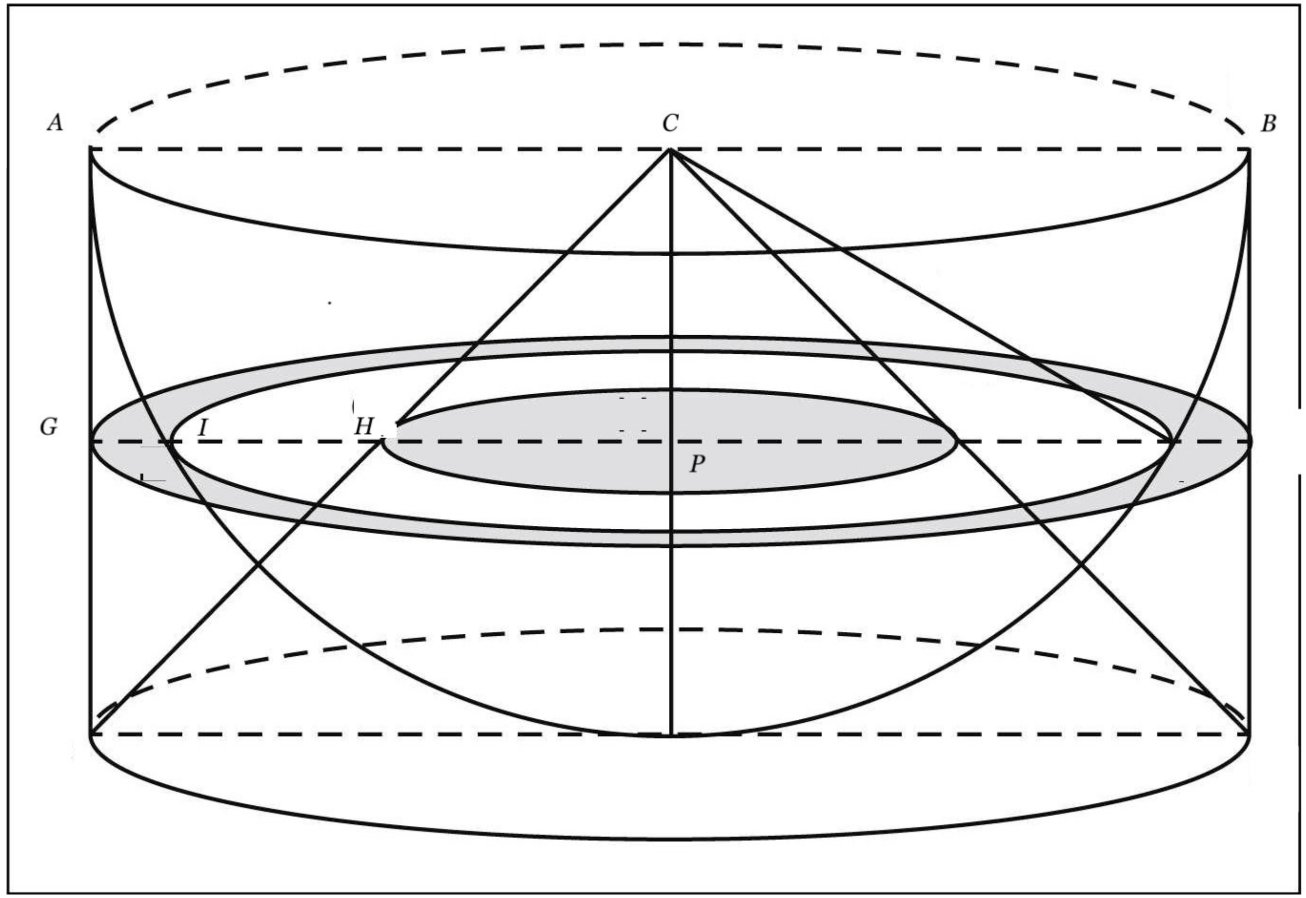
Oggi diciamo che in un insieme di numeri, con una addizione, una moltiplicazione (un *campo*) e un ordine, vale l’*assioma di Archimede* se per ogni due elementi positivi a e b esiste un intero positivo n tale che $na > b$.



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.


A
C
B
I
H
L
O
G
N
P
D
F
E


A
C
B
G
I
H
P

Carl Friedrich Gauss 1777-1855

Disquisitiones generales circa superfices curvas (1828)

non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum cuius dimensio una pro evanescente habetur.

- Archimede (225 a.C.) $A = 4\pi r^2$

$$\frac{1}{r^2} A = 4\pi$$

- Gauss (1827) $K \cdot A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$

Bernhard Riemann 1826-1866

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Bernhard Riemann

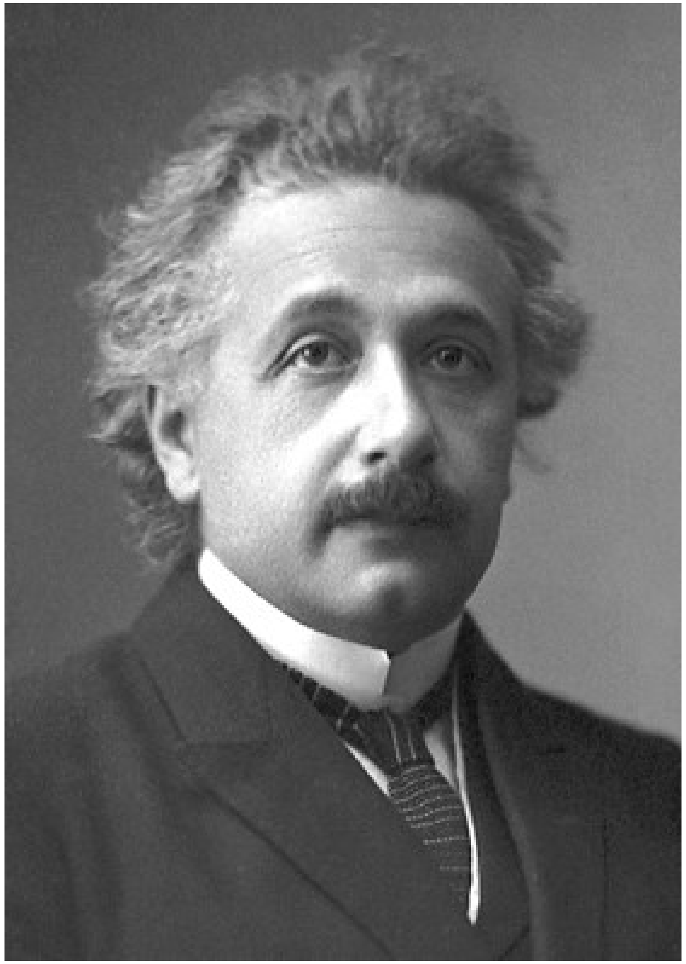
[Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.]*

Plan der Untersuchung

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen in Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei in Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von *Euklid* bis auf *Legendre*, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich

*Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; einige Ausführungen derselben findet man in der Beantwortung der Pariser Preisaufgabe nebst den Anmerkungen zu



Albert Einstein 1879 -1955

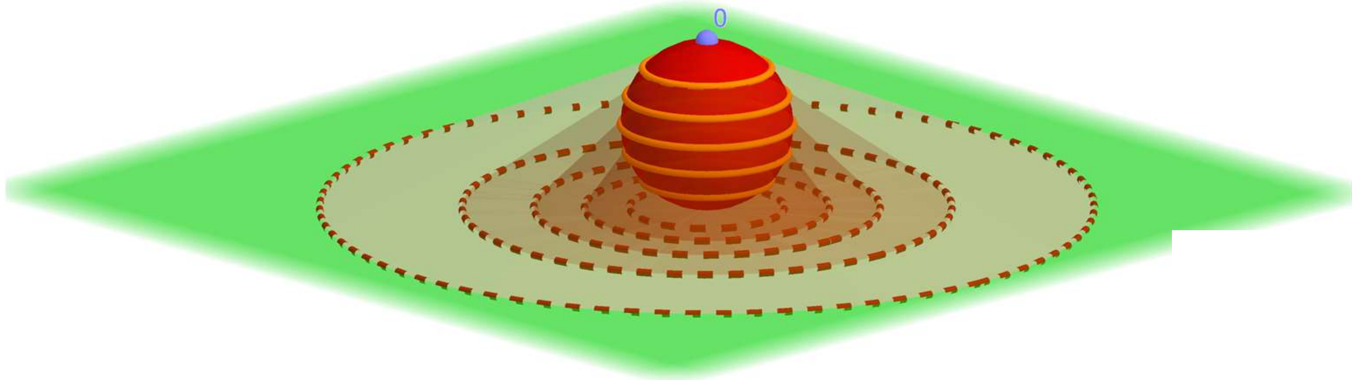
$$Ric_g - \frac{1}{2}\, s_g\, g = 8\pi T$$

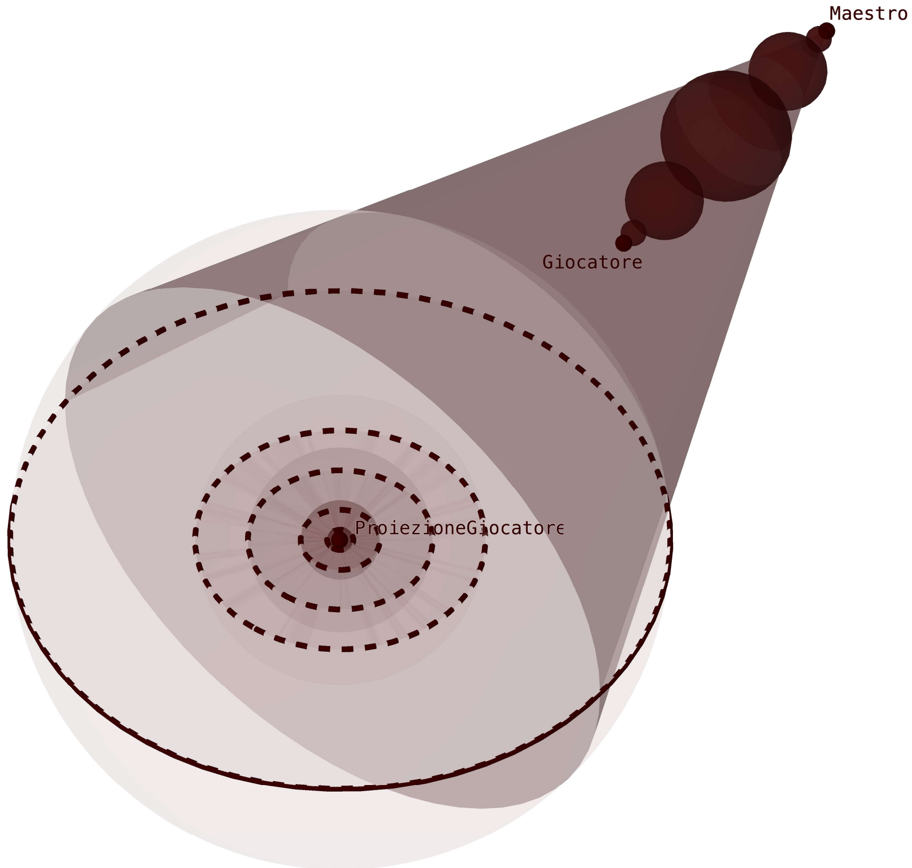
- Archimede (225 a.C.) $A_{Sfera} = 4\pi r^2 \quad (\frac{1}{r^2}\, A = 4\pi)$
- Gauss (1827) $K \cdot A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$
- Einstein (1916) $Ric_g - \frac{1}{2}\, s_g\, g = 8\pi T$

Il problema se la geometria pratica dell'universo sia o no euclidea ha un chiaro significato e solo l'esperienza può rispondervi. …Io attribuisco speciale importanza alla interpretazione della geometria che ho ora esposta, perché senza di essa sarei stato incapace di formulare la Teoria della Relatività. …

Possiamo "visualizzare" un universo tridimensionale che è finito benché illimitato? …Secondo gli ultimi risultati della teoria della relatività è possibile che anche il nostro spazio tridimensionale sia approssimativamente sferico, che cioè le leggi di disposizione dei corpi rigidi non siano in esse date dalla geometria euclidea, ma, approssimativamente dalla geometria sferica, se si prendono in considerazione parti di spazio sufficientemente estese. Ora, questo è il punto al quale l'immaginazione del lettore esita. "Nessuno può immaginare una cosa simile" esclama indignato. "Può essere detto ma non pensato. Posso immaginare abbastanza bene una superficie sferica ma nulla di analogo a tre dimensioni". Noi dobbiamo cercare di sormontare questo ostacolo mentale e il lettore paziente capirà che non è affatto un compito particolarmente difficile.

In questo modo, facendo uso come di una gruccia della pratica che la geometria euclidea ci fornisce nel pensare e nel visualizzare, abbiamo acquisita una immagine della geometria sferica. …Il mio solo scopo oggi è stato quello di dimostrare che l'umana capacità di visualizzare non è in alcun modo costretta a capitolare di fronte alla geometria non euclidea.


O


Maestro
Giocatore
ProiezioneGiocatore

Eugenio Beltrami 1835-1900

Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea (1868).
In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria. Questi concetti non sono di data recente, il sommo Gauss li aveva abbracciati fino dai suoi primi passi nella carriera delle scienze, e benché nessuno dei suoi scritti ne contenga l'esplicita esposizione, le sue lettere fanno fede della predilezione con cui li ha sempre coltivati e attestano la piena adesione che ha data alla dottrina di Lobatschewky.

Nel secondo saggio l'incipit è così:
Nel presente scritto espongo i risultati molto più generali a cui mi ha condotto l'ulteriore evoluzione di quel concetto, coordinato ad alcuni principii tracciati da Riemann nell'insigne suo lavoro postumo: Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria (1868) …. *Spero che le mie ricerche possano aiutare l'intelligenza di alcune parti di questo profondo lavoro.*


dosferica di rotazione
ellittico

Disuguaglianza Isoperimetrica

Proposizione. *Consideriamo nel piano una regione delimitata da una curva chiusa. Sia A l'area della regione e L la lunghezza della curva; vale la disuguaglianza*

$$4\,\pi\, A \leq\; L^2$$

Avremo uguaglianza se e solo se la figura è un cerchio

Simmetrizzazione di Steiner

Disuguaglianza isoperimetrica

Proposizione. *Consideriamo nel piano una regione delimitata da una curva chiusa. Sia A l'area della regione e L la lunghezza della curva; vale la disuguaglianza*

$$4\,\pi\,A \leq\, L^2$$

Avremo uguaglianza se e solo se la figura è un cerchio

Proposizione. *Consideriamo nello spazio ordinario una regione delimitata da una superficie chiusa; sia V il volume della regione e S l'area della superficie.*

$$36\,\pi\,V^2 \leq\, S^3$$

Avremo uguaglianza se e solo se la superficie è una sfera.

Proposizione. *Sia A un insieme dello iperspazio euclideo di dimensione n delimitato da un bordo chiuso; sia V il volume della regione e S quello del suo bordo.*

$$n^n\,k_n\,V^{n-1} \leq S^n$$

Vale uguale se e solo se A è la parte di iperspazio racchiuso in una (n-1)-sfera S.