Enrico Schlesinger e Giulia Barbato

Idee per progetti da assegnare

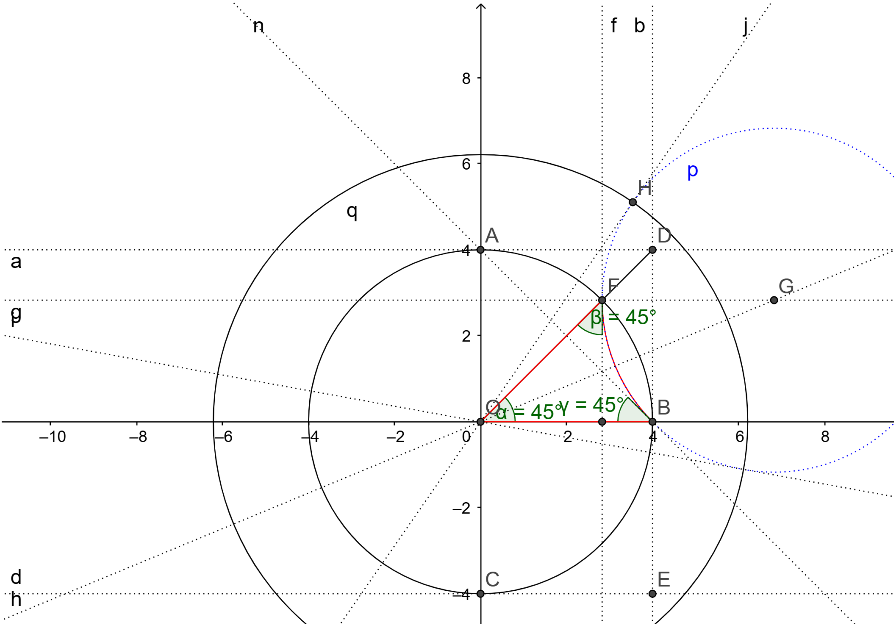
Laboratorio FDS
Milano, 22 aprile, 2026

Triangoli

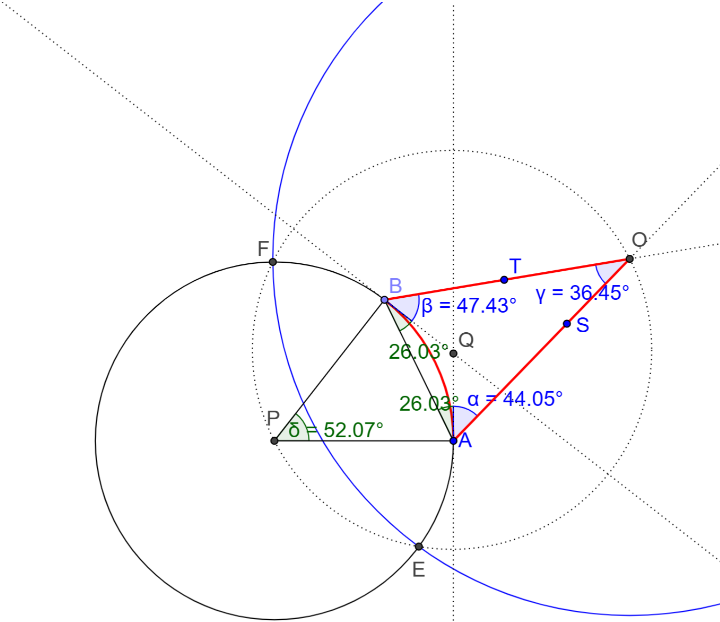
- Costruire un triangolo equilatero i cui angoli misurano 45^0.

- Costruire un triangolo con angoli assegnati (somma minore di 180^0).

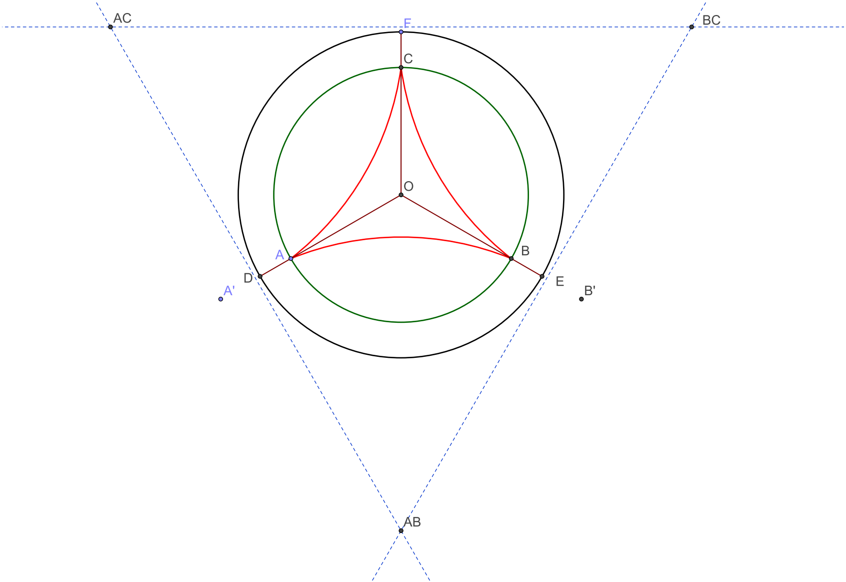
Triangolo equilatero con angolo di 45^0



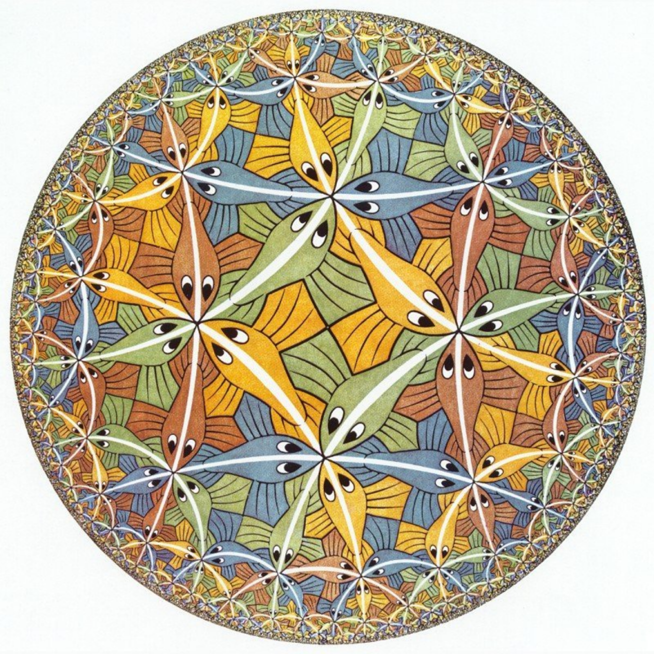
Triangolo dati angoli



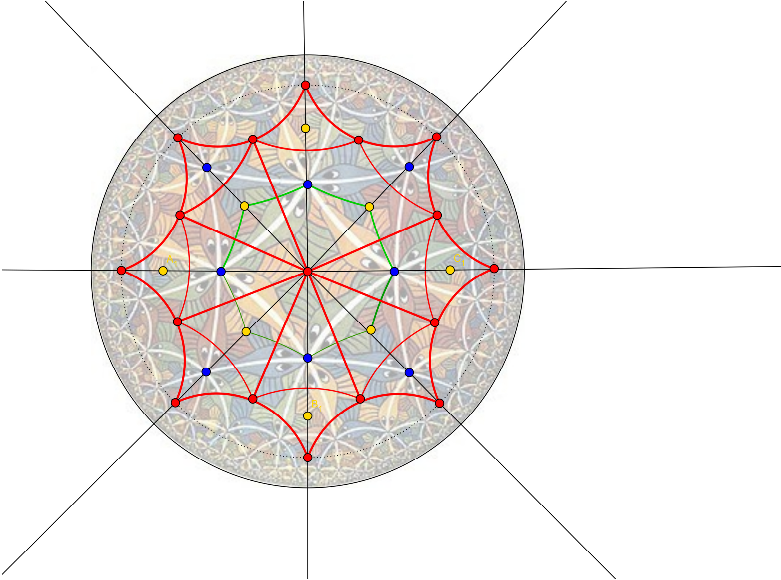
Triangoli equilateri per simmetria



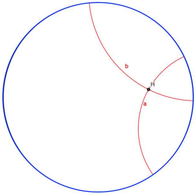
Ricostruire Escher: Circle limit III



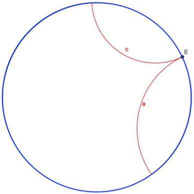
Ottagoni regolari



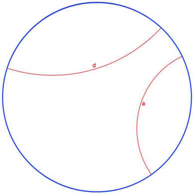
POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE RETTE DISTINTE 1



a) a e b sono **rette iperboliche incidenti**: si incontrano in H.



b) a e c sono **rette iperboliche parallele**: si incontrano in E appartenente al bordo.



c) a e d sono **rette iperboliche ultraparallele**: non si incontrano mai.

POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE RETTE DISTINTE 2

- Le rette a e b sono incidenti se la retta euclidea passante per i poli P_a e P_b è esterna al disco.
- Le rette a e b sono parallele se la retta euclidea passante per i poli P_a e P_b è tangente al disco.
- Le rette a e b sono ultraparallele se la retta euclidea passante per i poli P_a e P_b è secante al disco. In tal caso le due rette hanno una perpendicolare comune: se E e F sono i due punti in cui P_aP_b taglia il bordo del disco, la retta iperbolica EF è perpendicolare sia ad a sia a b.

Circonferenze euclidee e disco di Poincaré

- Una circonferenza euclidea contenuta nel disco è anche una circonferenza iperbolica (ma il centro euclideo non coincide con quello iperbolico)

- Una circonferenza euclidea Γ tangente internamente al disco è un orociclo (circonferenza con centro all'infinito): se P e Q sono punto di Γ interni al disco e E è il punto in cui Γ è tangente al disco, le semirette iperboliche PE e QE sono congruenti.

- Se una circonferenza euclidea Γ taglia l'orizzonte in E ed F, la porzione c di Γ interna a D è una curva equidistante o ipociclo : se EF è la retta iperbolica di versi E e F, la distanza tra un punto P di c e EF è costante.

Curva equidistante secondo Hubbard

Proposition and Definition 2.1.2 (Hyperbolic metric on the disc) *All analytic automorphisms of* $\mathbf{D}$ *are isometries for the (infinitesimal) hyperbolic metric*

$$\rho_{\mathbf{D}} := \frac{2|dz|}{1-|z|^2}. \qquad 2.1.5$$

All invariant metrics are multiples of the hyperbolic metric

The hyperbolic metric is also called the *Poincaré metric*. Figure 2.1.1, right, illustrates the hyperbolic metric on the unit disc.

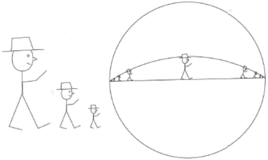
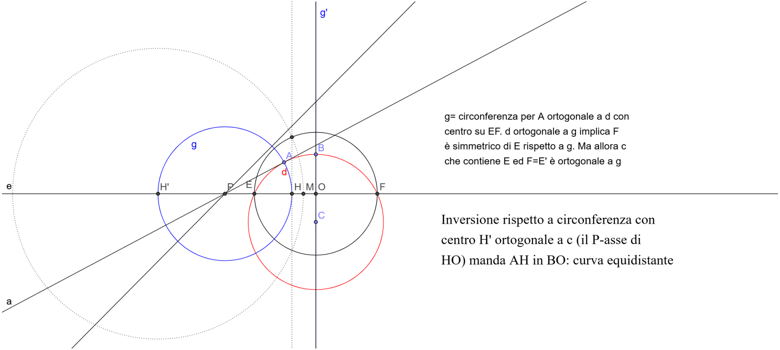


FIGURE 2.1.1 LEFT: Stickmen of different sizes. RIGHT: Measured with the hyperbolic metric, these stickmen in $\mathbf{D}$ are all the same size and are spaced an equal distance apart. The men are walking on the part of the real axis in the unit disc, which is a geodesic; their hats are on a curve at constant distance from this geodesic. This curve is a circle of hyperbolic geometry, i.e., a curve of constant geodesic curvature (see Definition 2.3.3), but it is not itself a geodesic. The points where the curve of feet and the curve of hats appear to meet are points at infinity.

Curva equidistante



g= circonferenza per A ortogonale a d con centro su EF. d ortogonale a g implica F è simmetrico di E rispetto a g. Ma allora c che contiene E ed F=E' è ortogonale a g

Inversione rispetto a circonferenza con centro H' ortogonale a c (il P-asse di HO) manda AH in BO: curva equidistante

Cerchio per tre punti

Tre punti non allineati giacciono su un'unica circonferenza o ipociclo o orociclo.

Isometrie del disco di Poincaré 1

- Un'isometria manda rette in rette.
- Un'isometria preserva gli angoli euclidei.
- Una rotazione è un'isometria ottenuta componendo due riflessioni i cui assi sono incidenti.
- Una traslazione è un'isometria ottenuta componendo due riflessioni i cui assi sono ultraparalleli (hanno perpendicolare comune)
- Una rotazione o traslazione limite è un'isometria ottenuta componendo due riflessioni i cui assi sono paralleli (hanno un verso in comune)

Isometrie del disco di Poincaré 2

- Una isometria che fissa un punto è una rotazione oppure una riflessione
- Una isometria che fissa tre punti non allineati è l'identità (fissa tutti i punti)
- Ogni isometria è il prodotto di al più tre riflessioni.

Traslazione e metrica 1

Supponiamo raggio D sia 1

- τ_a è la traslazione del segmento OA, dove A sul segmento $[0, 1)$ ha ascissa a

- Mostrare $\tau_a(x) = \frac{x+a}{1+ax}$ ($-1 < x < 1$)

- Definire $a \overset{D}{+} b = \tau_a(\tau_b(0)) = \frac{a+b}{1+ab}$ (per $0 \leq a, b < 1$)

- Posto $f(a) = \frac{1+a}{1-a}$, mostrare che

$$f(a \overset{D}{+} b) = f(a)f(b)$$

Traslazione e metrica 2

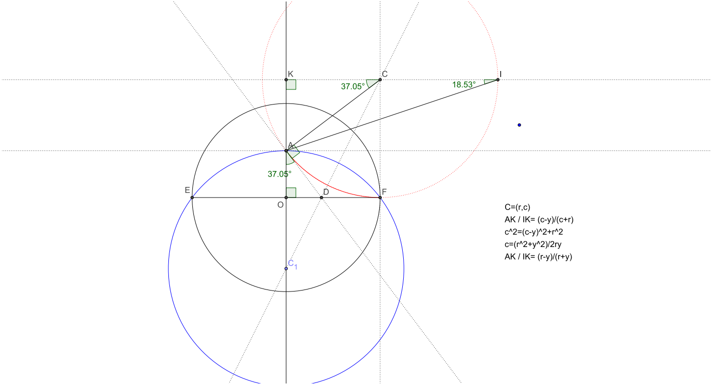
- Una funzione distanza che rispetti la congruenza deve soddisfare

$$d(0, a \overset{D}{+} b) = d(0, a) + d(o, b)$$

- Da $f(a \overset{D}{+} b) = f(a)f(b)$, si deduce che esiste una costante positiva k tale che

$$d(0, x) = k \log \frac{1+x}{1-x} \quad \text{per } 0 \leq x < 1$$

Angolo di parallelismo e formula Bolyai



C=(r,c)
AK / IK= (c-y)/(c+r)
c^2=(c-y)^2+r^2
c=(r^2+y^2)/2ry
AK / IK= (r-y)/(r+y)

Curvatura

Lunghezza P-circonferenza e curvatura

- La lunghezza di una P-circonferenza di raggio iperbolico r è
$$2\pi\, k \sinh(r/k).$$
Per r molto piccolo questo è in prima approssimazione $2\pi r$. Ma in generale è più lunga di una circonferenza euclidea con lo stesso raggio.
- Una misura della curvatura del disco iperbolico si ottiene confrontando la lunghezza di una P-circonferenza col caso euclideo
$$K = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - 2\pi\, k \sinh(r/k)}{r^3} = -\frac{1}{k^2}$$
- Per k molto grande, la curvatura K è praticamente nulla, come nel caso euclideo.